
Algorytmy logiki rozmytej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UMCS
UNIWERSYTET MEDYCYNICZNY
Wrocław

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Programowa i strukturalna reforma systemu kształcenia na Wydziale Mat-Fiz-Inf”.
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Człowiek-najlepsza inwestycja

UNIwersYTET MARIi CURIE-SKŁODOWSKIEJ
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI
INSTYTUT INFORMATYKI

Algorytmy logiki rozmytej

Wiesława Kuniszyk-Józkowiak



LUBLIN 2012

Instytut Informatyki UMCS

Lublin 2012

Wiesława Kuniszyk-Józkowiak

ALGORYTMY LOGIKI ROZMYTEJ

Recenzent: Maria Skublewska-Paszkowska

Opracowanie techniczne: Wiesława Kuniszyk-Józkowiak

Projekt okładki: Agnieszka Kuśmierska

Praca współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego

Publikacja bezpłatna dostępna on-line na stronach

Instytutu Informatyki UMCS: informatyka.umcs.lublin.pl

Wydawca

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Instytut Informatyki

pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin

Redaktor serii: prof. dr hab. Paweł Mikołajczak

www: informatyka.umcs.lublin.pl

email: dyrii@hektor.umcs.lublin.pl

Druk

FIGARO Group Sp. z o.o. z siedziba w Rykach

ul. Warszawska 10

08-500 Ryki

www: www.figaro.pl

ISBN: 978-83-62773-32-9

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

1. ZBIORY OSTRE I ROZMYTE – PRAWA, DEFINICJE	1
1.1. Zbiory ostre.....	2
1.2. Definicja zbiorów rozmytych.....	4
1.3. Funkcje przynależności.....	7
1.4. Modyfikacja funkcji przynależności.....	13
1.5. α -przekroje i zasada dekompozycji.....	15
1.6. Zasada rozszerzania	16
2. OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH	18
2.1. Operacje standardowe.....	19
2.2. Normy trójkątne.....	20
2.3. Normy parametryczne.....	26
2.4. Operacje skompensowane.....	29
2.5. Dopelnienia.....	30
2.6. Różnice zbiorów rozmytych.....	32
2.7. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych.....	34
3. RELACJE ROZMYTE	35
3.1. Relacje ostre i rozmyte.....	36
3.2. Podstawowe działania na relacjach rozmytych.....	37
3.3. Relacje binarne określone na pojedynczym zbiorze.....	39
3.4. Projekcja i rozszerzenie cylindryczne.....	41
4. ARYTMETYKA ROZMYTA	43
4.1. Liczby rozmyte.....	44
4.2. Arytmetyka liczb rozmytych.....	45
4.3. Liczby trójkątne.....	48
4.4. Porównywanie liczb rozmytych.....	49
4.5. Liczby LP.....	50
4.6. Działania na liczbach LP.....	51
5. WNIOSKOWANIE ROZMYTE	53
5.1. Logika klasyczna.....	54
5.2. Reguły wnioskowania rozmytego.....	55
5.3. Zmienne lingwistyczne.....	57
5.4. Implikacja rozmyta.....	58

5.5. Baza reguł rozmytych.....	63
5.6. Wnioskowanie na podstawie rozmytej bazy reguł.....	64
5.7. Operatory agregacji.....	66
6. STEROWNIKI ROZMYTE	69
6.1. Ogólny schemat sterownika rozmytego.....	70
6.2. Tworzenie bazy wiedzy.....	70
6.3. Blok rozmywania.....	74
6.4. Wnioskowanie w oparciu o bazę wiedzy.....	74
6.5. Blok wyostrzania.....	76
6.6. Sterownik Mamdaniego-Assilana.....	77
6.7. System rozmyty Takagi-Sugeno-Kanga.....	80
6.8. System rozmyty Łęskiego-Czogały.....	82
7. ROZMYTE ROZPOZNAWANIE WZORCÓW	83
7.1. Podstawy automatycznego rozpoznawania wzorców.....	84
7.2. Grupowanie rozmyte.....	84
7.2.1. Rozmyty algorytm c-średnich.....	85
7.2.2. Algorytm Gustafsona-Kessela.....	88
7.2.3. Ocena jakości grupowania.....	88
7.3. Klasyfikatory rozmyte.....	89
8. MIARY ROZMYTE	96
8.1. Miary przekonania i domniemania.....	97
8.2. Teoria możliwości.....	99
8.3. Porównanie teorii możliwości i prawdopodobieństwa.....	101
8.4. Stwierdzenia w języku naturalnym a teoria możliwości.....	102
8.5. Redukcja niepewności informacji.....	104
9. ROZMYTE BAZY DANYCH	106
9.1. Rozmyte relacyjne bazy danych.....	107
9.2. Zastosowanie zbiorów rozmytych w modelu związków encji.....	109
9.3. Zapytania nieprecyzyjne.....	110
9.4. Praktyczne realizacje systemów zapytań nieprecyzyjnych.....	112
9.5. Rozmyte obiektowe bazy danych.....	113
10. ZBIORY ROZMYTE TYPU 2	114
10.1. Definicje i własności zbiorów rozmytych typu 2.....	115
10.2. Operacje na zbiorach rozmytych typu 2.....	117
10.3. Relacje rozmyte typu 2.....	119
10.4. Redukcja typu.....	120
10.5. Systemy rozmyte typu 2.....	121

11. ELEMENTY ROZMYTEGO PRZETWARZANIA OBRAZÓW	126
11.1. Niepewność w przetwarzaniu obrazów.....	127
11.2. Poprawa jakości obrazu z zastosowaniem zbiorów rozmytych.....	128
11.3. Techniki rozmytej segmentacji.....	131
11.4. Detekcja krawędzi z zastosowaniem logiki rozmytej.....	134
12. LOGIKA ROZMYTA W MEDYCYNIE	136
12.1. Grupowanie rozmyte w diagnostyce medycznej.....	137
12.2. Rozmyte przetwarzanie obrazów medycznych.....	137
12.3. Rozmyte systemy monitorowania i kontroli.....	139
12.4. Relacje rozmyte w diagnostyce medycznej.....	140
12.5. Logika rozmyta w medycznych systemach ekspertowych.....	143
BIBLIOGRAFIA	145
SŁOWNIK	147
SKOROWIDZ	150

PRZEDMOWA

Algorytmy logiki rozmytej są obecnie stosowane w rozwiązywaniu bardzo wielu skomplikowanych problemów. Zbiory rozmyte wprowadzone w 1965 roku przez Lofti Zadeha do analizy systemów naśladowujących sposób postrzegania, oceny i percepcji człowieka zostały zastosowane praktycznie urządzeniach technicznych w tym artykułach masowych jak klimatyzatory, pralki czy odkurzacze, w systemach przetwarzania i rozpoznawania sygnałów, gromadzeniu i wyszukiwaniu informacji. Poznanie zasad oraz podstawowych algorytmów logiki rozmytej jest więc pożądane w pracy inżynierów i programistów. Skrypt przeznaczony jest dla studentów informatyki, a także magistrantów i doktorantów zainteresowanych zastosowaniem technik logiki rozmytej. Jest wynikiem prowadzonych przeze mnie wykładów dla kierunku informatyka.

Opracowanie składa się z dwunastu rozdziałów. W pierwszym zawarto podstawowe definicje oraz porównania zbiorów rozmytych i ostrych, opisy stosowanych klas funkcji przynależności i ich modyfikacje. Operacje na zbiorach rozmytych zostały opisane w rozdziale drugim. Ważną rolę w wielu zastosowaniach znajdują relacje rozmyte. Podstawowe wiadomości dotyczące tych zagadnień przedstawiono w rozdziale trzecim. W związku z nim pozostaje rozdział dziewiąty, w którym opisano zastosowania relacji rozmytych w bazach danych. Rozdział czwarty zawiera definicje i podstawy działań na liczbach rozmytych. Rozdziały 5-7 dotyczą zasad i zastosowań logiki rozmytej. Opisano w nich podstawy wnioskowania rozmytego oraz zastosowania reguł rozmytych w sterownikach i systemach rozpoznających.

Zbiory rozmyte nie opisują wszystkich rodzajów niepewności, z jakimi spotykamy się przy rozwiązywaniu wielu problemów. Dlatego też, w rozdziale ósmym opisano miary rozmyte, podstawy teorii możliwości i porównanie jej z teorią prawdopodobieństwa, a także metody oceny i redukcji niepewności informacji.

Obecnie bardzo wiele prac badawczych dotyczy teorii i zastosowań zbiorów rozmytych typu 2, w których rozmyciu podlegają również funkcje przynależności. Zagadnieniom tym poświęcono rozdział dziesiąty.

W rozdziale jedenastym przedstawione zostały niektóre rozwiązania stosowane przy przetwarzaniu obrazów cyfrowych z zastosowaniem logiki rozmytej, natomiast dwunastym krótki przegląd zagadnień informatyki medycznej, w których znajdują zastosowanie algorytmy logiki rozmytej.

Do opisów teoretycznych zostały dołączone liczne przykłady i ilustracje, które, mam nadzieję, ułatwią Czytelnikowi zrozumienie prezentowanych problemów. Przy nazwach podstawowych pojęć dołączono ich odpowiedniki w języku angielskim, co ma ułatwić poszukiwanie uzupełniających wiadomości na wybrany temat w światowych źródłach naukowych. W tym celu na końcu skryptu zamieszczono też słownik tych pojęć.

Zdaję sobie sprawę, że niektóre z prezentowanych metod nie zostały opisane wyczerpująco, dlatego też zainteresowanym Czytelnikom polecam lekturę opracowań wymienionych w załączonej bibliografii.

ROZDZIAŁ 1

ZBIORY OSTRE I ROZMYTE – PRAWA, DEFINICJE

1.1. Zbiory ostre.....	2
1.2. Definicja zbiorów rozmytych.....	4
1.3. Funkcje przynależności.....	7
1.4. Modyfikacja funkcji przynależności.....	13
1.5. α -przekroje i zasada dekompozycji.....	15
1.6. Zasada rozszerzania	16

1.1. Zbiory ostre

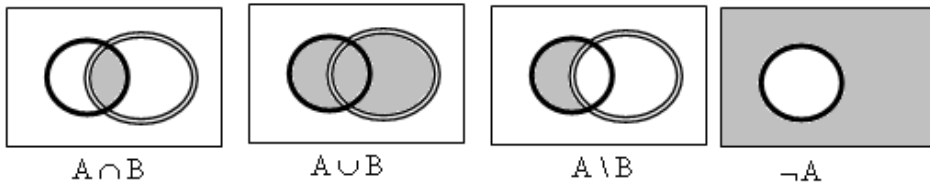
Opis rzeczywistości przy wykorzystaniu zbiorów klasycznych, określanych też, jako ostre (ang. crisp sets) przyjmuje za pewnik, że dany element należy lub nie należy do zbioru. Dla przykładu w zbiorze kobiet nie ma mężczyzn, do zbioru dzieci w wieku poniżej 10 lat nie należy Jacek, który ma lat 11, natomiast należy Ela, która ma 9 lat itd. Teoria zbiorów pozwala na podział analizowanej przestrzeni danych zwanej uniwersum na rozdzielne grupy. Niech będzie dany zbiór dowolnych elementów a_i ($i=1, 2, 3, 4, \dots$) należących do zbioru A i b_i nie należących do tego zbioru. Symbolicznie można zapisać, że: $a_i \in A$, $b_i \notin A$. Jeżeli oba te zbiory zostały utworzone w tej samej przestrzeni (uniwersum) X to zarówno elementy $a_i \in X$, $b_i \in X$. Dla każdego elementu x uniwersum X przynależność do danego zbioru można określić poprzez podanie tzw. funkcji charakterystycznej $\chi(x)$ (ang. characteristic function), która przyjmuje wartość 1 dla wszystkich elementów należących do zbioru i 0 dla pozostałych. Tak, więc dla zbioru A można zapisać to w postaci:

$$(1.1) \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$

Zbiór (mnogość) wszystkich funkcji charakterystycznych na przestrzeni X tworzy algebra Boole'a ze względu na następujące operacje [13,14]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) &= \min[\chi_A(x), \chi_B(x)] \\ \chi_A(x) \vee \chi_B(x) &= \max[\chi_A(x), \chi_B(x)] \\ \chi_{\neg A}(x) &= 1 - \chi_A(x) \end{aligned}$$

Operacje powyższe opisują przecięcie (ang. intersection) lub inaczej iloczyn, sumę (ang. union) oraz dopełnienie (ang. complement) zbiorów. Przez iloczyn zbiorów, który można symbolicznie również zapisać, jako $A \cap B$, rozumiana jest ich część wspólna, czyli te elementy, które należą zarówno do zbioru A jak i do zbioru B . Jeśli dla przykładu A jest zbiorem punktów ograniczonych pojedynczą, a B podwójną linią (rys. 1.1), to iloczyn tych zbiorów stanowi zbiór punktów wspólnych obu kół, natomiast suma - należących do któregośkolwiek z nich. Z kolei różnica zbiorów $A \setminus B$ jest częścią płaszczyzny należącą do koła A i nie należącą do B .



Rys.1.1 Ilustracja operacji iloczynu, sumy, różnicy i dopełnienia zbiorów ostrych

Dopełnieniem do zbioru A jest część powierzchni prostokątnej stanowiącej uniwersum, która nie należy do koła A.

Patrząc na powyższy przykładowy rysunek bardzo łatwo można wyobrazić sobie spełnienie podstawowych praw dotyczących zbiorów ostrych, które zostały opisane poniżej. Prawa te można przedstawić, jako działania na zbiorach lub ich funkcjach charakterystycznych, mając na uwadze, że funkcja charakterystyczna uniwersum jest równa 1.

1. Inwolucja (ang. involution): dopełnienie dopełnienia zbioru jest równe temu zbiorowi:

$$\begin{aligned}\neg\neg A &= A \\ 1 - [1 - \chi_A(x)] &= \chi_A(x)\end{aligned}\tag{1.3}$$

2. Przemienność (ang. commutativity) sumy i iloczynu zbiorów:

$$\begin{aligned}A \cup B &= B \cup A \\ \chi_A(x) + \chi_B(x) &= \chi_B(x) + \chi_A(x) \\ A \cap B &= B \cap A\end{aligned}\tag{1.4}$$

Suma zbiorów A i B jest równa sumie zbiorów B i A. To samo dotyczy iloczynu.

3. Łączność (ang. associativity):

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Jeśli więc dana jest suma zbiorów A i B i zostanie do niej dodany zbiór C to wynik jest taki sam, jak w przypadku dodania do zbioru A sumy zbiorów B i C. Czytelnik może łatwo zapisać przedstawione (a także dalsze) prawa używając funkcji charakterystycznych.

4. Rozdzielność (ang. distributivity):

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}\tag{1.6}$$

Iloczyn zbioru A przez sumę zbiorów B i C jest równy sumie iloczynów zbiorów: A i B oraz A i C. Suma zbiorów: A i iloczynu B i C jest równa iloczynowi sum odpowiednich zbiorów.

5. Absorpcja (ang. absorption)

Jak sama nazwa wskazuje wynika z niej, że w wyniku działań zostaje zaabsorbowany jeden ze zbiorów. Można zapisać tę własność w postaci:

$$\begin{aligned}A \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap (A \cup B) &= A\end{aligned}\tag{1.7}$$

6. Absorpcja przez uniwersum (X) lub zbiór pusty (\emptyset)

$$\begin{aligned}A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup X &= X\end{aligned}\tag{1.8}$$

7. Idempotentność (ang. idempotence)

Iloczyn zbioru A przez siebie jest równy A. To samo dotyczy sumy.

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A \quad (1.9)$$

8. Identyczność (ang. identity)

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A \quad (1.10)$$

Suma zbioru A i zbioru pustego jest równa zbiorowi A oraz iloczyn zbioru A i uniwersum jest też równy A.

9. Prawo zaprzeczenia (ang. law of contradiction)

Iloczyn danego zbioru i jego dopełnienia jest zbiorem pustym.

$$B \cap \neg B = \emptyset \quad (1.11)$$

10. Prawo wyłączonego środka (ang. law of excluded middle)

$$A \cup \neg A = X$$

11. Prawa de Morgana

Dopełnienie iloczynu zbiorów jest równe sumie ich dopełnień. Dopełnienie sumy zbiorów jest równe iloczynowi ich dopełnień.

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B \quad (1.12)$$

Zauważmy, że prawa dotyczące sumy i przecięcia zbiorów występują w parach. Zbiory mogą składać się z podzbiorów. Zawieranie się podzbiorów w zbiorze głównym nosi nazwę inkluzji (ang. inclusion) i oznaczane jest symbolem \subseteq . Zbiór A zawiera się w zbiorze B, jeśli suma tych zbiorów jest równa zbiorowi B lub ich przecięcie jest równe zbiorowi A:

$$A \subseteq B \quad \text{jeśli } A \cup B = B \text{ lub } A \cap B = A$$

Iloczyn kartezjański (ang. Cartesian product) zbiorów A i B jest uporządkowanym zbiorem par wszystkich elementów i jest oznaczany $A \times B$. Podzbiór iloczynu kartezjańskiego nazywany jest relacją.

1.2. Definicja zbiorów rozmytych

W klasycznej teorii zbiorów zakłada się, że istnieją wyraźne granice pomiędzy poszczególnymi zbiorami. Taki opis rzeczywistości nie uwzględnia bogactwa problemów, w których nie da się takich wyraźnych granic wyznaczyć. Dotyczą one codziennego życia, pracy lekarza, inżyniera i innych. Gdybyśmy dla przykładu mieli za zadanie podzielić dużą grupę osób o wzroście w zakresie od 149 cm do 190 cm na dwa zbiory: “niskie” i “wysokie” i przyjęlibyśmy granicę ostrą 170 cm, to Annę o wzroście 169 cm uznalibyśmy za niską a Ewę o wzroście 171 cm za wysoką, tymczasem widzimy dwie osoby porównywalnego wzrostu. W badaniach medycznych określone są dopuszczalne granice różnego rodzaju wskaźników niezbędnych do diagnozowania, nie znaczy to jednak, że dla przykładu, jeśli dopuszczalne stężenie glukozy we krwi wynosi 120 mg/dl to osobę o stężeniu 121 mg/dl zalicza się do chorych na cukrzycę. Oczywiście w tych przykładach niedoskonały opis świata jest korygowany przez człowieka. W urządzeniach technicznych, sterujących programach komputerowych, automatach potrzebne są narzędzia, które bez naszego udziału uwzględniać będą nieostrość granic.

Wprowadzone przez L. A. Zadeha w 1965 zbiory rozmyte (ang. fuzzy sets)

uwzględniają brak ostrych granic pomiędzy zbiorami, dzięki wprowadzeniu funkcji przynależności $\mu_A(x)$ (ang. membership function). Jest ona w pewnym sensie odpowiednikiem funkcji charakterystycznej zbiorów ostrych (porównaj wzór 1.1) i może przyjmować wartości w zakresie $[0,1]$. Skrajne wartości oznaczają odpowiednio: 0 – brak przynależności do zbioru, 1- pełną przynależność. Wartości pośrednie należy rozumieć jako częściową przynależność. Wartości funkcji przynależności są nazywane stopniami przynależności (ang. membership grade). Jeśli chcemy opisać zbiór rozmyty A określony na uniwersum X , to dla każdego elementu podać należy stopień przynależności, co można przedstawić w postaci następującej [13, 14, 18, 19]:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\} \quad (1.13)$$

$\mu_A(x)$ - stopień przynależności elementów X do zbioru A .

Zbiory rozmyte zapisuje się też symbolicznie przy użyciu symboli sumy lub całki. Jeśli uniwersum składa się ze skończonej liczby elementów $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ stosowany jest zapis:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_k)}{x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (1.14)$$

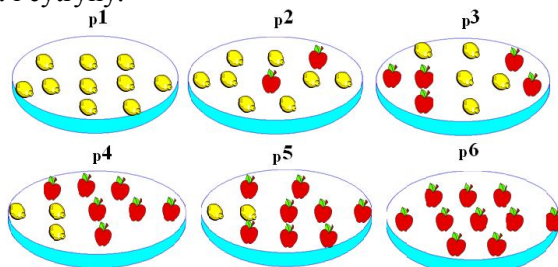
Kreska ułamkowa nie oznacza w tym zapisie dzielenia, lecz przyporządkowanie kolejnym elementom stopni przynależności do zbioru rozmytego A . Dla uniwersum o nieskończonej liczbie elementów stosowany jest następujący zapis symboliczny:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (1.15)$$

Powstaje pytanie: W jaki sposób przyporządkować elementom uniwersum funkcje przynależności do danego zbioru rozmytego? Odpowiedź nie jest prosta. Dokładne funkcje przynależności nie istnieją. Wyrażają one pewne prawidłowości lub uporządkowanie, nie mogą być wyznaczone w sposób ścisły, lecz w powiązaniu z wiedzą w obrębie problemu, który jest opisywany przy ich wykorzystaniu. Przesłanki i sposoby konstrukcji tych funkcji opisane zostaną w dalszej części opracowania. W poniżej przedstawionym przykładzie wyznaczenie funkcji przynależności jest proste i intuicyjne.

Przykład 1.1.

Niech uniwersum stanowi zbiór pater przedstawionych na rys. 1.2, na których są jabłka i cytryny.



Rys. 1.2. Podział pater na dwa zbiory rozmyte: „patery z jabłkami” i „patery z cytrynami”

Każdą z przedstawionych pater można zaliczyć do zbioru: *patery z jabłkami* lub *patery z cytrynami*. Jeśli konstruujemy zbiór rozmyty: *patery z jabłkami*, to kolejnym elementom: p1, p2, p3, p4, p5, p6, przypiszemy odpowiednio stopnie przynależności 0; 0,2; 0,5; 0,7; 0,8; 1, natomiast zbiorowi: *patery z cytrynami* odpowiednio 1; 0,8; 0,5; 0,3; 0,2; 0. Możemy, więc wg notacji 1.13 zapisać:

$$\text{Patery z jabłkami} = \{(p1, 0), (p2, 0,2), (p3, 0,5), (p4, 0,7), (p5, 0,8), (p6, 1)\}$$

$$\text{Patery z cytrynami} = \{(p1, 1), (p2, 0,8), (p3, 0,5), (p4, 0,3), (p5, 0,2), (p6, 0)\}$$

Jeśli zastosujemy zapis symboliczny przedstawiony wzorem 1.14 zapiszemy:

$$\text{Patery z jabłkami} = \frac{0}{p1} + \frac{0,2}{p2} + \frac{0,5}{p3} + \frac{0,7}{p4} + \frac{0,8}{p5} + \frac{1}{p6}$$

$$\text{Patery z cytrynami} = \frac{1}{p1} + \frac{0,8}{p2} + \frac{0,5}{p3} + \frac{0,3}{p4} + \frac{0,2}{p5} + \frac{0}{p6}$$

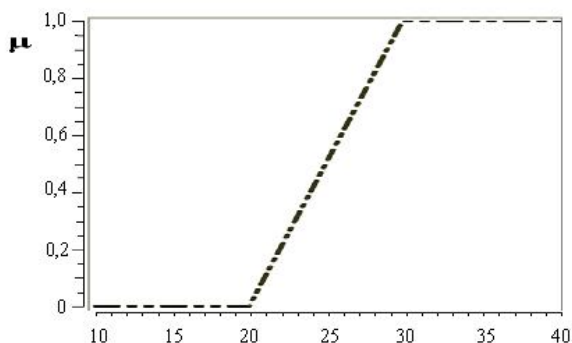
Zbiór elementów o stopniach przynależności większych od zera nosi nazwę nośnika zbioru rozmytego (ang. support). W powyższym przykładzie nośnik zbioru *patery z jabłkami* składa się z elementów [p2, p3, p4, p5, p6], natomiast *patery z cytrynami* [p1, p2, p3, p4, p5]. Maksymalną wartość funkcji przynależności zbioru rozmytego A nazywamy jego wysokością i oznaczamy $h(A)$. Jeśli jest ona równa 1 to zbiór nazywamy normalnym. Jeżeli dany zbiór rozmyty A nie jest normalny, to można go znormalizować stosując przekształcenie:

$$\mu_{An}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)} \quad (1.16)$$

Elementy zbioru o stopniach przynależności równych 1 tworzą jego rdzeń (ang. core). W zbiorze *patery z jabłkami* jest to element p6, natomiast w zbiorze *patery z cytrynami* – p1.

Przykład 1.2.

Niech będzie dany zbiór rozmyty *wysoka temperatura powietrza* określony ciągłą funkcją przynależności przedstawioną na rys. 1.3 na uniwersum [10°C – 40°C].



Rys. 1.3. Funkcja przynależności do zbioru rozmytego „wysoka temperatura powietrza”

Nośnikiem tego zbioru jest zakres temperatur [20 °C - 40 °C], jego wysokość jest równa 1, natomiast rdzeniem zakres temperatur [30 °C - 40 °C].

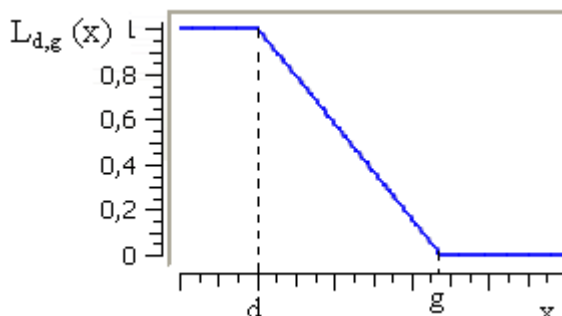
Punkty, przy których funkcja przynależności jest równa $\frac{1}{2}$ nazywane są punktami krzyżowania (ang. crossover). Określają one szerokość (ang. width) zbioru rozmytego: $Sz(A) = |x_2 - x_1|$, gdzie x_1 i x_2 są punktami krzyżowania, czyli $\mu(x_1) = \mu(x_2) = \frac{1}{2}$.

1.3. Funkcje przynależności

Zdefiniowanie dowolnego zbioru rozmytego sprowadza się do określenia jego uniwersum oraz funkcji przynależności elementów uniwersum do tego zbioru. W podrozdziale zostaną opisane klasy najczęściej stosowanych funkcji przynależności. Funkcję liniową $L_{d,g}(x)$ otrzymuje się korzystając z następującego wzoru:

$$L_{d,g}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq d \\ \frac{g-x}{g-d} & d < x \leq g \\ 0 & x > g \end{cases} \quad (1.17)$$

Jak widać jest ona dwuparametrowa. Można bardzo łatwo dobrać parametry graniczne a mianowicie: d – poniżej której funkcja przynależności jest równa 1 oraz g – wartość, powyżej której przynależność jest zerowa (rys. 1.4).



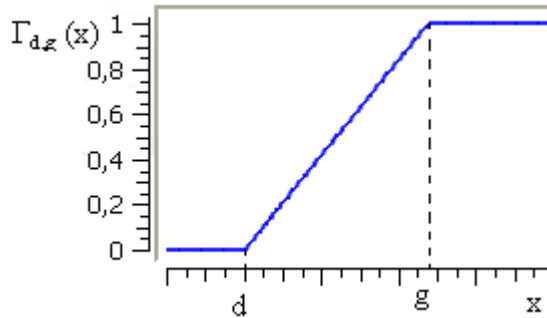
Rys. 1.4. Funkcja przynależności klasy L

Funkcja $\Gamma_{d,g}(x)$ jest opisana wzorem (rys. 1.5):

$$\Gamma_{d,g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ \frac{x-d}{g-d} & d < x \leq g \\ 1 & x > g \end{cases} \quad (1.18)$$

Parametr tej funkcji z lewej strony – d odpowiada elementowi, poniżej którego funkcja przynależności jest równa 0, natomiast g – stanowi granicę,

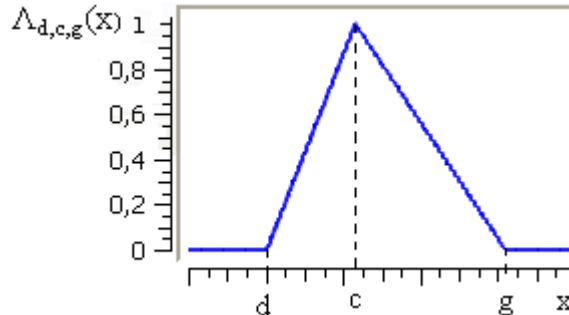
powyżej której funkcja przynależności przyjmuje wartość 1.



Rys. 1.5. Funkcja przynależności klasy Γ

Do opisu zbiorów pośrednich stosowana jest funkcja $\Lambda_{d,c,g}(x)$ (rys. 1.6):

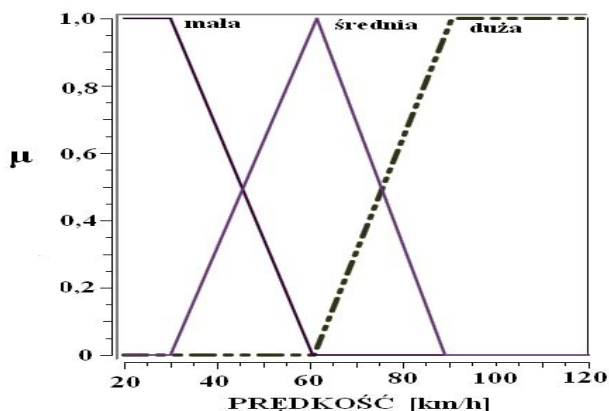
$$\Lambda_{d,c,g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d, \quad x > g \\ \frac{x-d}{c-d} & d < x \leq c \\ \frac{g-x}{g-c} & c < x \leq g \end{cases} \quad (1.19)$$



Rys. 1.6. Funkcja przynależności klasy Λ

Przykład 1.3.

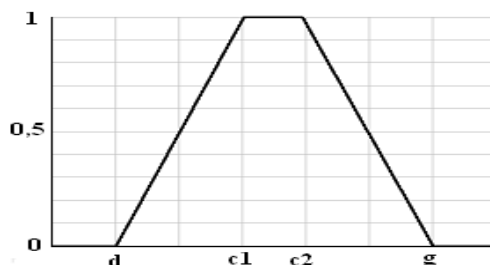
Niech będzie dane uniwersum ciągłe $[20, 120]$ wartości prędkości samochodu w km/h. Podzielmy ten zakres na trzy zbiory rozmyte: *mała*, *średnia* i *duża prędkość samochodu* (rys. 1.7). Zbiór rozmyty *mała* został odwzorowany funkcją L (wzór 1.17) z parametrami $d=30$ km/h i $g=60$ km/h, *średnia* - Λ (wzór 1.19) z parametrami: $d=30$ km/h, $c=60$ km/h, $g=90$ km/h, *duża* - Γ (wzór 1.18) przy $d=60$ km/h, $g=90$ km/h.



Rys. 1.7. Przykładowe liniowe funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: mała, średnia i duża prędkość samochodu

W uzasadnionych przypadkach zamiast tej funkcji można stosować przedziałową funkcję $\Pi_{d, c1, c2, g}(x)$.

$$\Pi_{d, c1, c2, g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d, \quad x \geq g \\ \frac{x - d}{c1 - d} & d < x \leq c1 \\ 1 & c1 < x \leq c2 \\ \frac{g - x}{g - c2} & c2 < x < g \end{cases} \quad (1.20)$$

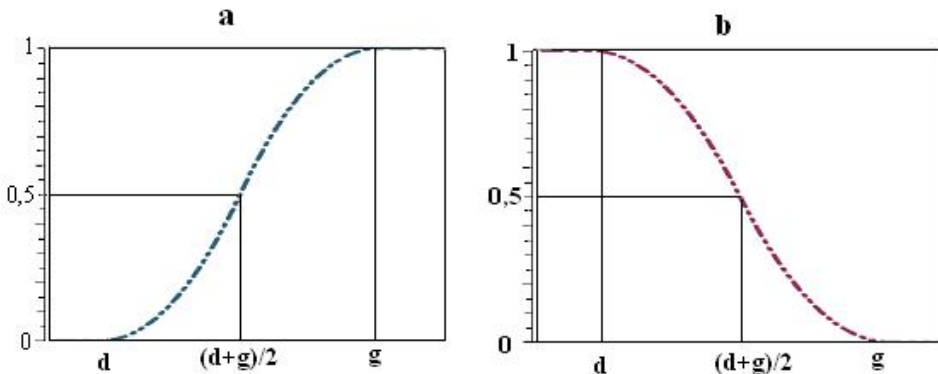


Rys. 1.8. Parametry funkcji Π

Dobre rezultaty w rozwiązaniach wielu problemów daje stosowanie nieprostoliniowych funkcji przynależności, przedstawionych równaniami 1.21-1.23.

$$s_{d,g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ 2 \cdot \left(\frac{x-d}{g-d} \right)^2 & d < x \leq \frac{d+g}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-g}{g-d} \right)^2 & \frac{d+g}{2} < x < g \\ 1 & x \geq g \end{cases} \quad (1.21)$$

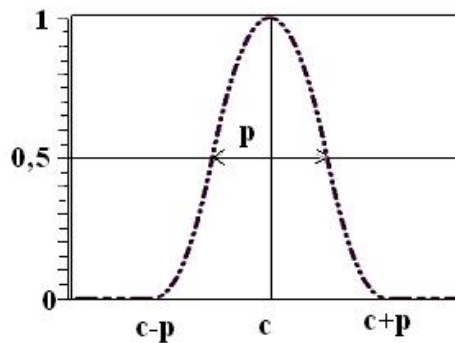
$$z_{d,g}(x) = 1 - s_{d,g}(x) \quad (1.22)$$



Rys. 1.9. Parametry funkcji s (rys. a) i z (rys. b)

Funkcja przynależności typu $\pi_{p,c}(x)$ jest zdefiniowana następującym wzorem:

$$\pi_{p,c}(x) = \begin{cases} s_{c-p,c}(x) & x < c \\ 1 - s_{c,c+p}(x) & x \geq c \end{cases} \quad (1.23)$$

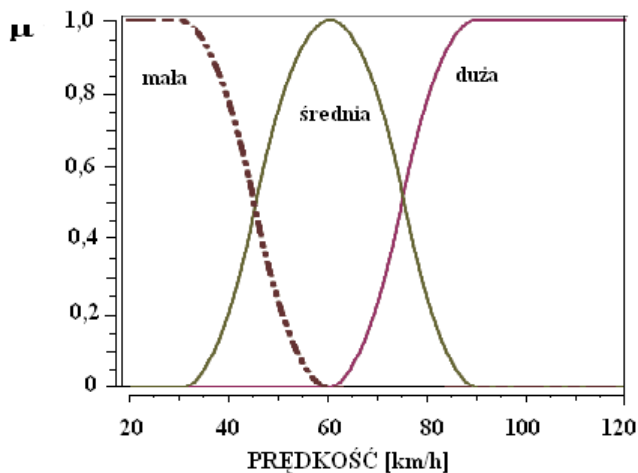


Rys. 1.10. Parametry funkcji π

Funkcje tych trzech typów zostały zastosowane odpowiednio do zbiorów rozmytych *mała*, *średnia* i *duża* prędkość samochodu (rys. 1.11).

Przykład 1.4.

Zbiór *mała* charakteryzuje funkcja $z_{d,g}(x)$ z parametrami $d=30$ km/h i $g=60$ km/h, *duża* $s_{d,g}(x)$ przy $d=60$ km/h i $g=90$ km/h, natomiast *średnia* – funkcja $\pi_{c,p}(x)$ z $c=60$ km/h i $p=30$ km/h.

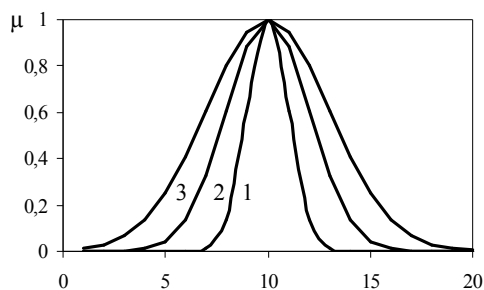


Rys. 1.11. Przykładowe nieliniowe funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: *mała*, *średnia* i *duża* prędkość samochodu

W wielu praktycznych zastosowaniach znajduje zastosowanie funkcja gaussowska:

$$\mu_G(x, m, \sigma) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.24)$$

Funkcja ta przyjmuje wartość 1 dla $x = m$, a jej szerokość zależy od parametru $\sigma > 0$ (rys. 1.12).

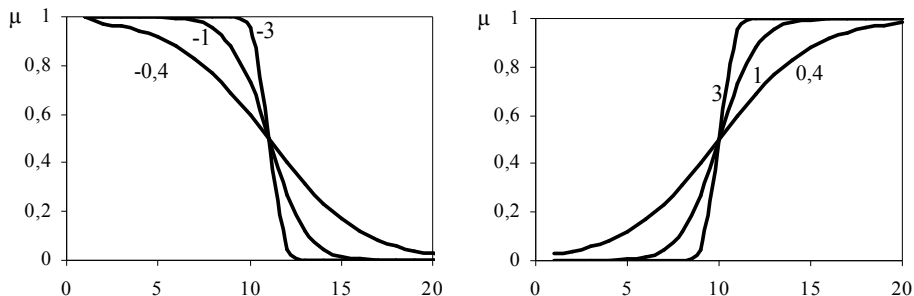


Rys. 1.12. Gaussowskie funkcje przynależności przy wartościach $\sigma=1, 2, 3$ oraz $m=10$

Stosowane są również sigmoidalne funkcje przynależności, których kształty

można zmieniać w zależności od parametru β . Parametr ten może przyjmować wartości dodatnie i ujemne (wzór 1.25 i rys. 1.13). Parametr c określa punkt krzyżowania się tych funkcji przy różnych wartościach β .

$$\mu_A(x, c, \beta) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(x - c)]} \quad (1.25)$$



Rys. 1.13. Sigmoidalne funkcje przynależności dla $c=10$ oraz parametrów $\beta = -0,4; -1; -3$ (z lewej strony) oraz $\beta = 0,4; 1; 3$ (z prawej strony)

Na zakończenie opisu różnych kształtów funkcji przynależności należy wspomnieć o prostym i stosowanym kształcie funkcji zwanym singletonem. Określa ona zbiór rozmyty, którego nośnik jest równoważny rdzeniowi i składa się z jednego elementu:

$$\mu_{\delta}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Funkcja tego typu jest stosowana w operacjach rozmywania, która zostanie przedstawiona w rozdziale 6.

W przedstawionych przykładach funkcje przynależności określono w sposób dowolny i nie należy przypisywać im innego znaczenia niż prezentacja określonego typu. Generalnie, zarówno interpretacja, jak również wyznaczanie parametrów funkcji nie jest proste. W interpretacji Zadeha funkcja przynależności oznacza stopień wiarygodności, że dany element można zaliczyć do określonego zbioru. Nie należy mylić wiarygodności z prawdopodobieństwem

Dla przykładu, jeśli lekarz ma wybrać jeden z dwóch leków na dane schorzenie i z jego wiedzy wynika, że pierwszy z prawdopodobieństwem 0,7 jest skuteczny w danym przypadku, natomiast drugi z wiarygodnością 0,7 ma skład taki jak inne stosowane w tej chorobie, to wybierze lek drugi. Przy wyborze pierwszego wie, że z prawdopodobieństwem 0,3 może zastosować kurację na inne schorzenie. Wybierając drugi lek musi liczyć się z niepewnością o stopniu 0,3, że jego skład jest identyczny z lekami skutecznymi w tym schorzeniu. Aby nie popełnić błędu zaordynowania leku całkowicie nieskutecznego (co jest możliwe w trzech na dziesięć przypadków), a leku mniej skutecznego, wybierze z pewnością lek drugi.

Funkcja przynależności może być także interpretowana, jako stopień podobieństwa (bliskości) danego elementu do wzorcowego, czyli w pełni przynależnego do określonego zbioru, a także, jako stopień preferencji obiektów.

Wyznaczenie w sposób ścisły funkcji przynależności jest niemożliwe. Jest określana pośrednio przez pomiar odległości, częstości lub kosztu. Jeśli interpretujemy ją, jako stopień podobieństwa, wyznaczamy odległości elementów od wzorca i przypisujemy tym wartościom odpowiednie stopnie przynależności. Przy stosowaniu kryterium częstości stopień przynależności do określonego zbioru rozmytego jest proporcjonalny do względnej częstości z jaką dany element był eksperymentalnie uznawany za należący do zbioru. Możemy wyobrazić sobie, że poddajemy dany element ocenie 10 ekspertów, z których każdy ma odpowiedzieć na pytanie, czy należy on do zbioru A. Jeśli siedmiu odpowiedziało twierdząco, funkcja przynależności wynosi 0,7. Przy pomiarze kosztu, funkcja przynależności jest odwrotnie proporcjonalna do kosztu, jaki ekspert ponosi zaliczając element do zbioru.

1.4. Modyfikacja funkcji przynależności

W niektórych rozwiązaniach z zastosowaniem zbiorów rozmytych są stosowane modyfikacje kształtu funkcji przynależności. Modyfikowane funkcje mają znaczenie lingwistyczne. Jeśli mamy zbiór rozmyty A, któremu odpowiada wyrażenie „x jest A” to poprzez modyfikację funkcji przynależności możemy utworzyć zbiory: „bardzo A” i „mniej więcej A”. Pierwszy z nich tworzymy stosując jednoargumentową operację koncentracji, drugi rozcieńczenia. Koncentracja $CON(A)$ jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności określonej wzorem:

$$\mu_{CON(A)}(x) = [\mu_A(x)]^2 \quad (1.27)$$

Operacją przeciwną do koncentracji jest rozcieńczenie. Funkcja przynależności do rozcieńczonego (DIL) zbioru rozmytego jest określona wzorem:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)} \quad (1.28)$$

Przez zastosowanie operacji koncentracji i rozcieńczenia możemy uzyskać zwiększenie lub zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego. Intensyfikację kontrastu uzyskuje się stosując następujący wzór z parametrem $\beta > 1$:

$$\mu_{INT_{\beta}(A)}(x) = \begin{cases} 2^{\beta-1} [\mu_A(x)]^{\beta} & \text{dla } \mu_A(x) < \frac{1}{2} \\ 1 - 2^{\beta-1} [1 - \mu_A(x)]^{\beta} & \text{dla } \mu_A(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.29)$$

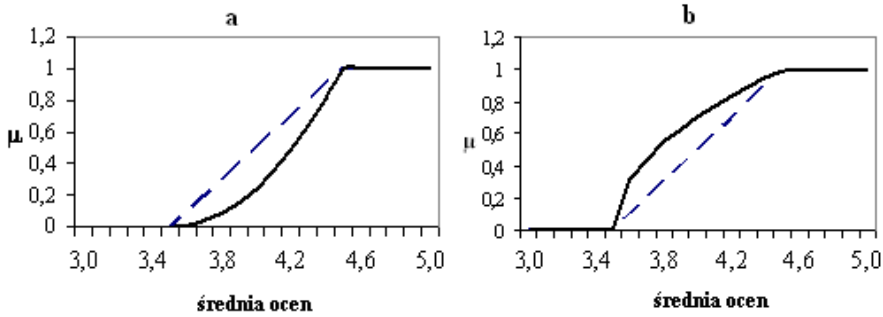
Zmniejszenie kontrastu (DIM) jest uzyskiwane poprzez następującą operację:

$$\mu_{\text{DIM}_{\beta(A)}}(x) = \begin{cases} \sqrt[\beta]{\mu_A(x)/2^{\beta-1}} & \text{dla } \mu_A(x) < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt[\beta]{[1 - \mu_A(x)]/2^{\beta-1}} & \text{dla } \mu_A(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.30)$$

Najczęściej stosowanym we wzorach 1.29 i 1.30 parametrem jest $\beta=2$.

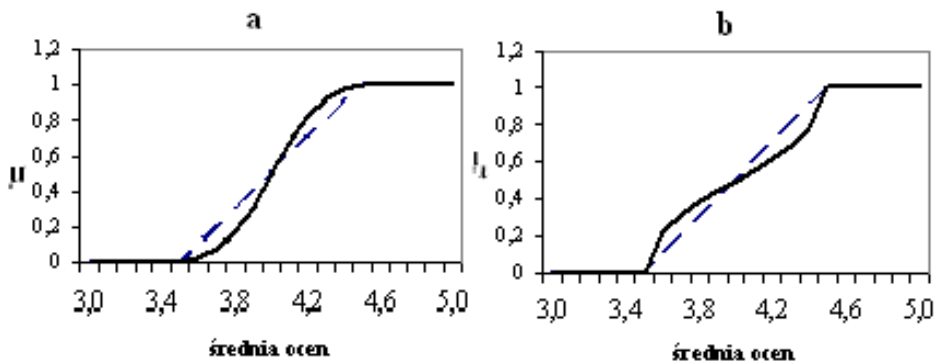
Przykład 1.5.

Niech będzie dany zbiór rozmyty *dobry uczeń* opisany funkcją przynależności typu $\Gamma_{3,4}(x)$ przedstawioną linią przerywaną na rys. 1.14 a. Linia ciągła charakteryzuje stopień przynależności do koncentracji tego zbioru, czyli zbiór rozmyty *bardzo dobry uczeń*. Na rys. 1.14 b przedstawiono rozcieńczenie (linia ciągła) zbioru rozmytego *dobry uczeń*. Rozcieńczonemu zbiorowi możemy przypisać wyrażenie *średnio dobry uczeń*.



Rys.1.14. Funkcje przynależności: do zbioru rozmytego „dobry uczeń” (linia przerywana), jego koncentracji (linia ciągła) - a oraz rozcieńczenia - b (linia ciągła)

Intensyfikację oraz zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego *dobry uczeń* przy $\beta=2$ jest przedstawiono na rys. 1.15 a i b.



Rys.1.15. Funkcje przynależności: do zbioru rozmytego „dobry uczeń” (linia przerywana) oraz intensyfikacja kontrastu (linia ciągła) – a i zmniejszenie kontrastu – b (linia ciągła)

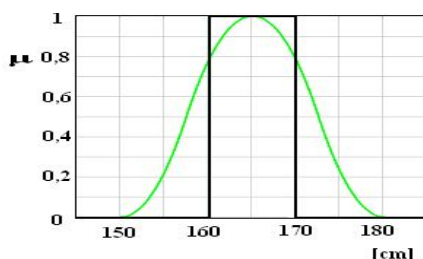
1.5. α -przekroje i zasada dekompozycji

Zbiór elementów, dla których funkcja przynależności przyjmuje wartości większe lub równe α nosi nazwę α -przekroju (A_α) (ang. α -cuts). Wartość α oczywiście powinna zawierać się w granicach $[0,1]$. α -przekroje są zbiorami ostrymi o funkcji charakterystycznej równej 1 dla $\mu_A(x) \geq \alpha$ i 0 dla $\mu_A(x) < \alpha$:

$$\chi_{A_\alpha} = \begin{cases} 1 & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \mu_A(x) < \alpha \end{cases} \quad (1.31)$$

Przykład 1.6.

Na rys. 1.16 przedstawiono funkcję przynależności do zbioru rozmytego „człowiek średniego wzrostu” i jego przekrój na poziomie $\alpha=0,8$. Przekrój jest zbiorem ostrym o funkcji charakterystycznej równej 1 w przedziale $[160, 170]$.



Rys. 1.16. Funkcja przynależności do zbioru rozmytego „człowiek średniego wzrostu” oraz funkcja charakterystyczna zbioru ostrego będącego przekrojem dla $\alpha=0,8$

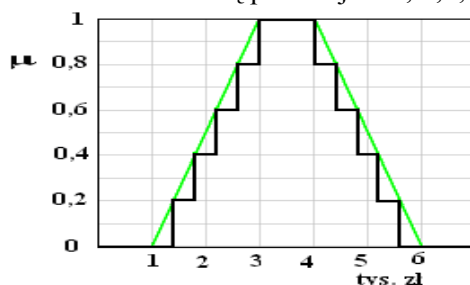
Dowolny zbiór rozmyty A można, zgodnie z twierdzeniem o dekompozycji, przedstawić jako sumę jego przekrojów [10]:

$$A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \quad (1.32)$$

Funkcja przynależności może być, zgodnie z powyższym wzorem, traktowana jako supremum z iloczynów α i funkcji charakterystycznych $\chi_{A_\alpha}(x)$:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{ \alpha \chi_{A_\alpha}(x) \} \quad (1.33)$$

Przykład 1.7. Na rys. 1.17 przedstawiono przybliżenie funkcji przynależności do zbioru rozmytego „średnie zarobki” sumą przekrojów 0, 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, 1.



Rys. 1.17. Przybliżenie funkcji przynależności do zbioru rozmytego „średnie zarobki” zgodnie z zasadą dekompozycji

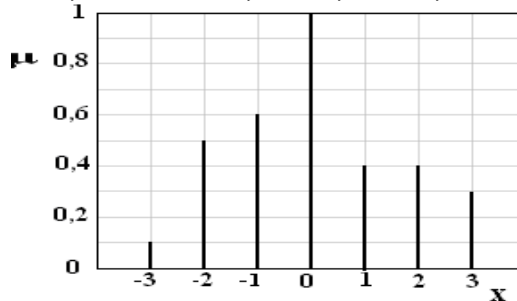
1.6. Zasada rozszerzania

Opisane w poprzednich podrozdziałach zbiory rozmyte określone zostały na ostrym uniwersum X . Jeśli X jest dziedziną funkcji $y=f(x)$ ($f: X \rightarrow Y$), to zbiór rozmyty A określony na uniwersum X przekształca się w zbiór rozmyty B określony na uniwersum Y ($B=f(A)$). Jest to tzw. zasada rozszerzania (ang. extension principle). Stopnie przynależności elementów y do zbioru B są maksymalnymi wartościami stopni przynależności tych elementów z dziedziny X , które są przekształcone w ten sam element y .

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{gdy } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{gdy } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (1.34)$$

Przykład 1.8. Niech zbiór rozmyty A będzie określony w przestrzeni dyskretnej $[-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$ (rys. 1.18):

$$A = 0,1/-3 + 0,5/-2 + 0,6/-1 + 1/0 + 0,4/1 + 0,4/2 + 0,3/3$$



Rys. 1.18. Funkcja przynależności do przykładowego zbioru rozmytego A określonego na dyskretnym uniwersum X

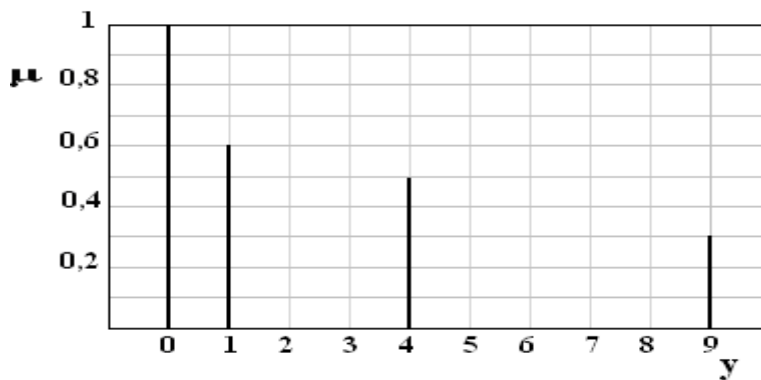
Zastosujmy funkcję $y = f(x) = x^2$. Obliczmy wartości y dla wszystkich x z uniwersum zbioru rozmytego A (tabela 1.1).

Tabela 1.1. Wartości funkcji $y = f(x) = x^2$ odwzorowującej zbiór rozmyty A w zbiór rozmyty B .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Zgodnie z zasadą rozszerzania powstanie następujący zbiór B (rys. 1.19):

$$B = 1/0 + \{\max [\mu_A(-1), \mu_A(1)]\}/1 + \{\max [\mu_A(-2), \mu_A(2)]\}/4 + \{\max [\mu_A(-3), \mu_A(3)]\}/9 = 1/0 + \{\max (0,6; 0,4)\} / 1 + \{\max (0,5; 0,4)\} / 4 + \{\max (0,1; 0,3)\} / 9 = 1/0 + 0,6/1 + 0,5/4 + 0,3/9.$$



Rys. 1.19. Funkcja przynależności do zbioru rozmytego B utworzonego zgodnie z zasadą rozszerzania zbioru A z rys. 1.18

ROZDZIAŁ 2

OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH

2.1. Operacje standardowe.....	19
2.2. Normy trójkątne.....	20
2.3. Normy parametryczne.....	26
2.4. Operacje skompensowane.....	29
2.5. Dopełnienia.....	30
2.6. Różnice zbiorów rozmytych.....	32
2.7. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych.....	34

2.1. Operacje standardowe

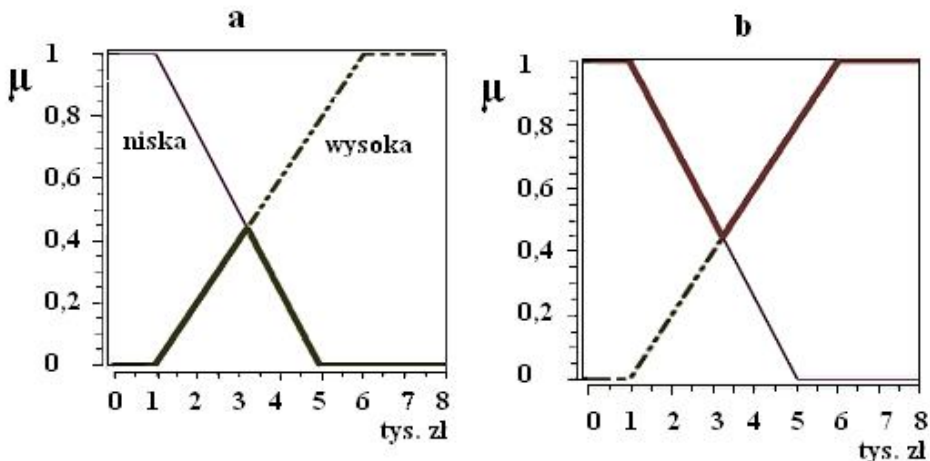
Działania na zbiorach rozmytych sprowadzają się do operacji na funkcjach przynależności. Proste zastąpienie funkcji charakterystycznych przez funkcje przynależności pozwala zdefiniować standardowe operacje na zbiorach rozmytych (ang. standard fuzzy operations): iloczynu, sumy i dopełnienia, podobnie jak w układzie równań 1.2:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) &= \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \\ \mu_A(x) \vee \mu_B(x) &= \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \\ \mu_{\neg A}(x) &= 1 - \mu_A(x)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Powyższe operacje noszą też nazwę mnogościowych.

Przykład 2.1.

Na rys. 2.1 przedstawione zostały przykłady standardowych operacji iloczynu (rys. a) i sumy (rys. b) zbiorów rozmytych: *niska* (linia ciągła) i *wysoka* (linia przerywana) cena komputera.



Rys.2.1. Operacje standardowe: iloczynu (a) i sumy (b) zbiorów rozmytych: „niska” i „wysoka” cena komputera

Funkcja przynależności do zbioru *niska* jest typu L z parametrami: $d=1$ i $g=5$ tys. zł, natomiast do zbioru *wysoka* - Γ przy $d=1$ i $g=6$ tys. zł.

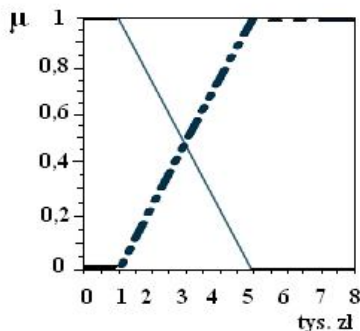
Nietrudno zauważyć, że zbiory rozmyte zachowują wszystkie własności zbiorów ostrych z wyjątkami: wyłączonego środka i zaprzeczenia. Te ostatnie dla zbiorów rozmytych przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\mu_a(x) \wedge \mu_{\neg a}(x) &\leq 1/2 \\ \mu_a(x) \vee \mu_{\neg a}(x) &\geq 1/2\end{aligned}\quad (2.2)$$

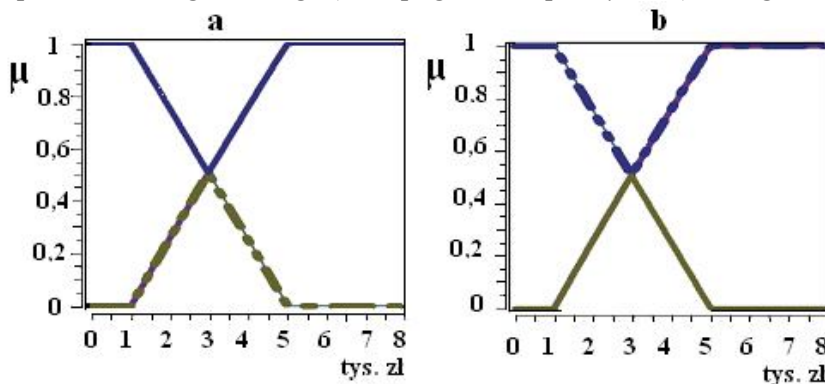
Dlatego też mnogość funkcji charakterystycznych nie tworzy algebry Boole'a lecz de Morgana.

Przykład 2.2.

Utwórzmy zbiór rozmyty będący dopełnieniem do zbioru *niska cena komputera* (linia przerywana na rys. 2.2) a następnie iloczyn i sumę standardową tego zbioru i jego dopełnienia (linia przerywana na rys. 2.3). Zauważmy, że funkcja przynależności do zbiorów będących iloczynem jest $\leq 1/2$ natomiast sumą $\geq 1/2$.



Rys. 2.2. Funkcje przynależności do zbioru rozmytego „niska” cena komputera i dopełnienia mnogościowego (linia pogrubiona przerywana) do tego zbioru



Rys.2.3. Prawa zaprzeczenia (a) i wyłącznego środka (b) na przykładzie zbioru rozmytego „niska” cena (funkcje przynależności do iloczynu i sumy mnogościowej oznaczono liniami przerywanymi)

2. 2. Normy trójkątne

Opisane w poprzednim rozdziale iloczyny i sumy zbiorów rozmytych nie są jedynymi możliwymi operacjami. Ogólnie iloczyn określa się jako t-normę natomiast sumę jako s-normę lub t-konormę [10]. Można więc ogólnie zapisać:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= T[\mu_A(x), \mu_B(x)] \\ \mu_{A \cup B}(x) &= S[\mu_A(x), \mu_B(x)]\end{aligned}\quad (2.3)$$

Funkcje stosowane do wyznaczania iloczynu (t-normy) i sumy (s-normy) noszą nazwę norm trójkątnych. Niech będą dane trzy zbiory A, B, C. Dla uproszczenia,

w dalszej części opracowania, funkcje przynależności do tych zbiorów zostaną oznaczone odpowiednio przez a , b , c . T-normy spełniać powinny następujące aksjomaty:

- 1) Warunki brzegowe: $T(a,1)=a$ oraz $T(a,0)=0$. Jeśli funkcja przynależności do któregoś z zbiorów jest równa 1, to wynik jest równy funkcji przynależności do drugiego zbioru. W przypadku gdy funkcja ta jest równa 0 dla jednego ze zbiorów, wynik t-normy jest równy 0.
- 2) Przemienność: $T(a,b)=T(b,a)$.
- 3) Monotoniczność: Jeśli $a \leq c$ to $T(a,b) \leq T(c,b)$
- 4) Łączność: $T[a,T(b,c)] = T[T(a,b),c]$.

Ostatnie trzy aksjomaty są takie same dla s-norm. Natomiast warunki brzegowe dla s-norm są następujące: $S(a,1)=1$ oraz $S(a,0) = a$. Jeśli więc jedna z funkcji przynależności jest równa 1 to wynik wynosi 1, jeśli natomiast któraś jest zerowa wynik jest równy drugiej.

Oczywiście przedstawione w poprzednim podrozdziale operacje mnogościowe iloczynu i sumy zaliczają się odpowiednio do grup: t-norm lub s-norm.

W literaturze są nazywane normami Zadeha. Często stosowana jest t-norma algebraiczna:

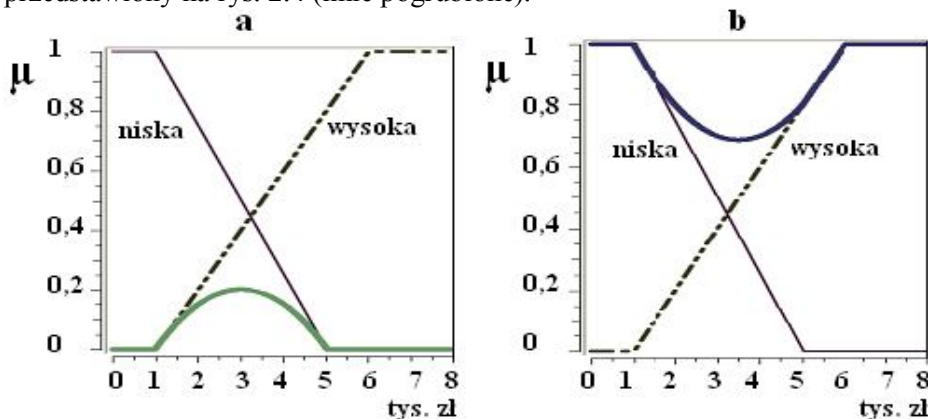
$$T_{\text{algebr}}(a,b) = a \cdot b \quad (2.4)$$

Odpowiednia operacja sumy jest nazywana s-normą probabilistyczną i jest wyznaczana zgodnie ze wzorem:

$$S_{\text{probabil}}(a,b) = a+b - a \cdot b \quad (2.5)$$

Przykład 2.3.

Wyniki działania s-normy algebraicznej (a) i s-normy probabilistycznej (b) dla zbiorów rozmytych *niska* oraz *wysoka* cena komputera z przykładu 2.1 jest przedstawiony na rys. 2.4 (linie pogrubione).



Rys. 2.4. Operacje t-normy algebraicznej (a) i s-normy probabilistycznej (b) na zbiorach rozmytych: „niska” i „wysoka” cena komputera

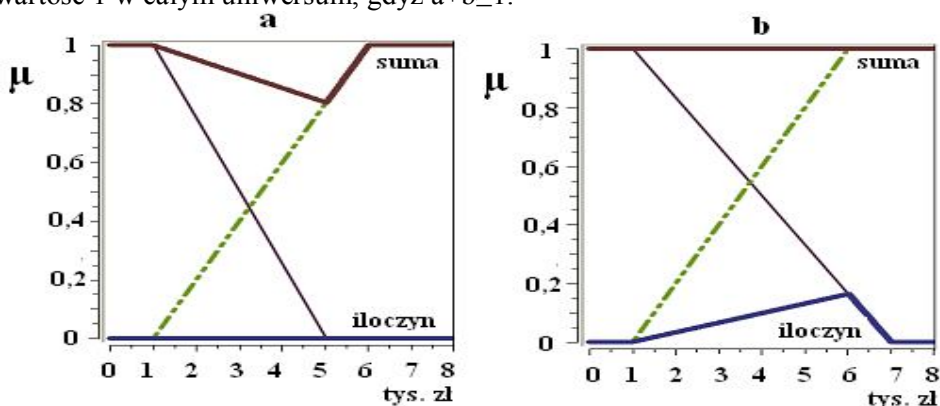
Nazwy kolejnej pary norm pochodzą od nazwiska polskiego uczonego Łukaszczyka, twórcy logiki wielowartościowej. Bywają też nazywane w literaturze operacjami logicznymi.

$$T_{\text{Łukaszewicza}}(a, b) = \max(a + b - 1, 0) \quad (2.6)$$

$$S_{\text{Łukaszewicza}}(a, b) = \min(a + b, 1) \quad (2.7)$$

Przykład 2.4.

Na rys. 2.5 przedstawiono wyniki działania t-normy (a) i s-normy (b) Łukaszewicza na zbiory *wysoka* oraz *niska cena komputera*. Funkcje przynależności do zbioru *wysoka* są na rys. 2.5 a i b funkcjami $\Gamma_{1,6}$. Funkcja przynależności do zbioru *niska* na rys. a jest typu L z parametrami $d=1$ i $g=5$, natomiast na rys. b – również typu L lecz z parametrami $d=1$, $g=7$. Funkcja przynależności na rys. 2.5 a do zbioru będącego wynikiem działania t-normy Łukaszewicza przyjmuje wartość zerową w całym zakresie. Osiąga ona wartości niezerowe tylko wtedy, gdy suma funkcji przynależności do obu zbiorów jest większa od 1 (rys. 2.5 b). S-norma Łukaszewicza (suma) na rys. 2.5 b przyjmuje wartość 1 w całym uniwersum, gdyż $a+b \geq 1$.



Rys.2.5. Operacje logiczne: iloczynu i sumy zbiorów rozmytych: „niska” i „wysoka” cena komputera. Parametry funkcji Γ na rys. a i b są takie same. Dla funkcji L na rys. a $d=1$ i $g=5$, natomiast na rys. b: $d=1$, $g=7$ tys. zł

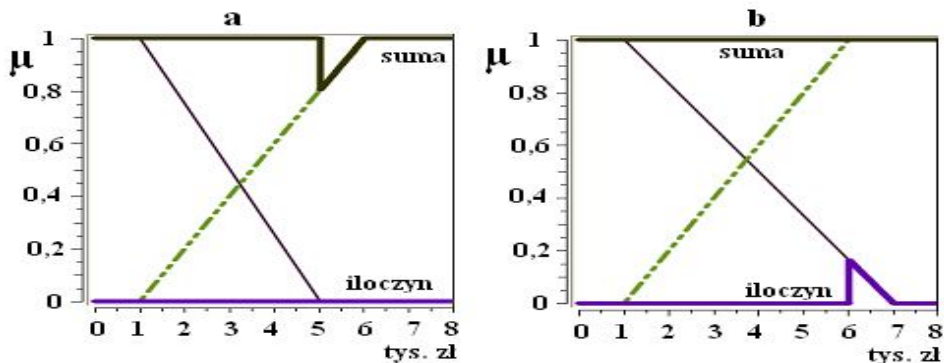
Operacje drastyczne można zapisać następującymi wzorami:

$$T_{drast} = \begin{cases} \min(a, b) & \text{gdy } \max(a, b) = 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$S_{drast} = \begin{cases} \max(a, b) & \text{gdy } \min(a, b) = 0 \\ 1 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad (2.9)$$

Przykład 2.5.

Dla porównania dla tych samych zbiorów rozmytych, co na rys. 2.5 przedstawiono wyniki operacji drastycznych (rys. 2.6). Funkcja przynależności do iloczynu drastycznego na rys. 2.6 a jest zerowa w całym zakresie, ponieważ $\max(a, b) = 1$ tylko dla $\min(a, b) = 0$. Funkcja przynależności dla sumy drastycznej (rys. 2.6 b) jest równa 1 w całym zakresie, gdyż $\max(a, b) = 1$ dla $\min(a, b) = 0$.



Rys. 2.6. Operacje drastyczne: iloczyn i suma zbiorów rozmytych: „niska” i „wysoka” cena komputera. Parametry funkcji Γ na rys. a i b są takie same. Dla funkcji L na rys. a: $d=1$ i $g=5$, natomiast na rys. b: $d=1$, $g=7$ tys. zł

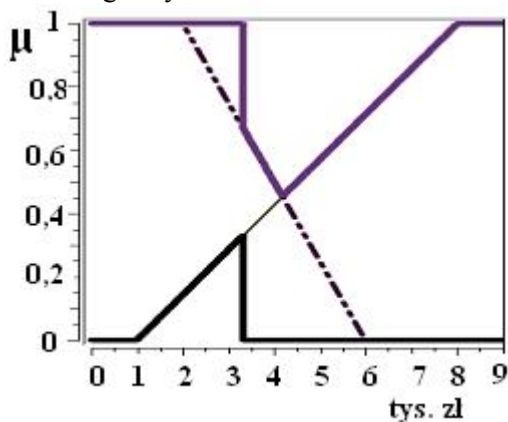
Często stosowanymi operacjami są również t-normy i s-normy Fodora, które wyliczane są wg następujących wzorów:

$$T_{Fodora} = \begin{cases} \min(a, b) & \text{gdy } a + b > 1 \\ 0 & \text{gdy } a + b \leq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$S_{Fodora} = \begin{cases} \max(a, b) & \text{gdy } a + b < 1 \\ 1 & \text{gdy } a + b \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Przykład 2.6.

Na rys. 2.7 przedstawiono porównanie t-normy i s-normy Fodora dla zbiorów rozmytych *niska* oraz *wysoka* cena komputera. Funkcja przynależności do zbioru *niska* jest klasy L z parametrami $d=2$, $g=6$ tys. zł, natomiast do zbioru *wysoka* typu Γ z wartościami $d=1$ i $g=8$ tys. zł.



Rys. 2.7. T-norma i s-norma Fodora na zbiorach rozmytych: „niska” i „wysoka” cena.. Parametry funkcji Γ : $d=1$, $g= 8$ tys. zł, L : $d= 2$ i $g=6$ tys. zł

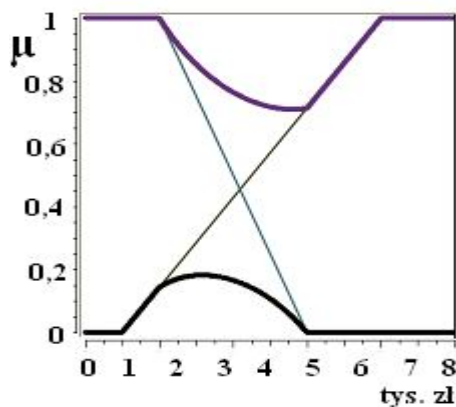
Do norm trójkątnych zalicza się również normy Einsteina, które są definiowane następującymi wzorami:

$$T_E(a, b) = \frac{ab}{2 - (a + b - ab)} \quad (2.12)$$

$$S_E(a, b) = \frac{a + b}{1 + ab} \quad (2.13)$$

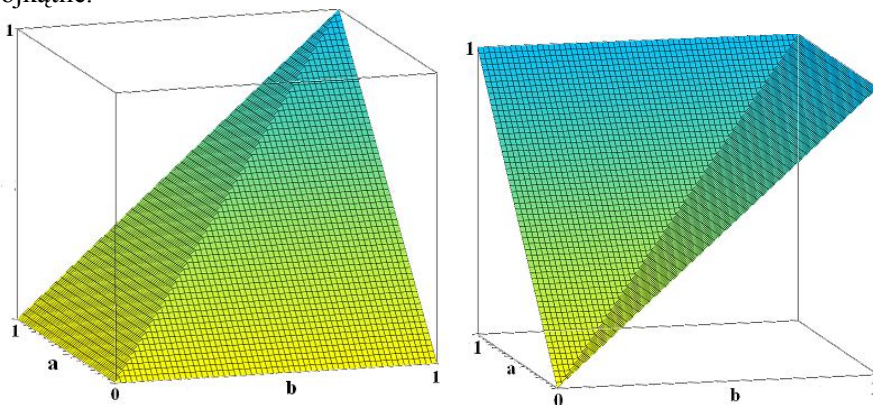
Przykład 2.7.

Na rys. 2.8 przedstawiono porównanie t-normy i s-normy Einsteina dla zbiorów rozmytych „niska” oraz „wysoka” cena komputera z przykładu 2.6

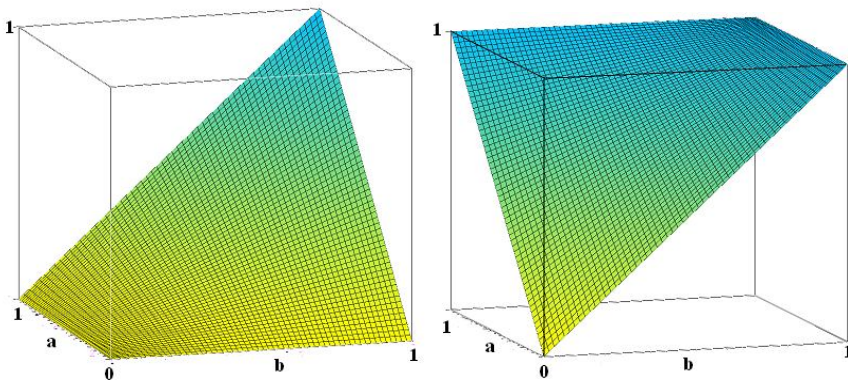


Rys. 2.8. T-norma i s-norma Einsteina dla zbiorów rozmytych „niska” i „wysoka” cena komputera

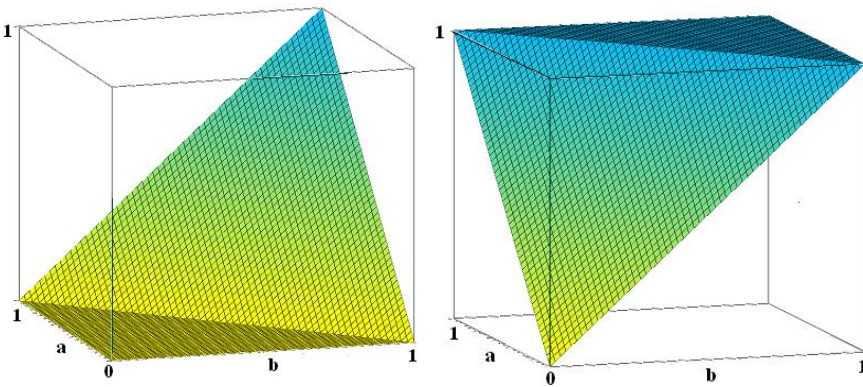
Normy trójkątne można przedstawić graficznie w postaci trójwymiarowych wykresów. Jak łatwo zauważyć kształty tych wykresów uzasadniają nazwę normy trójkątne.



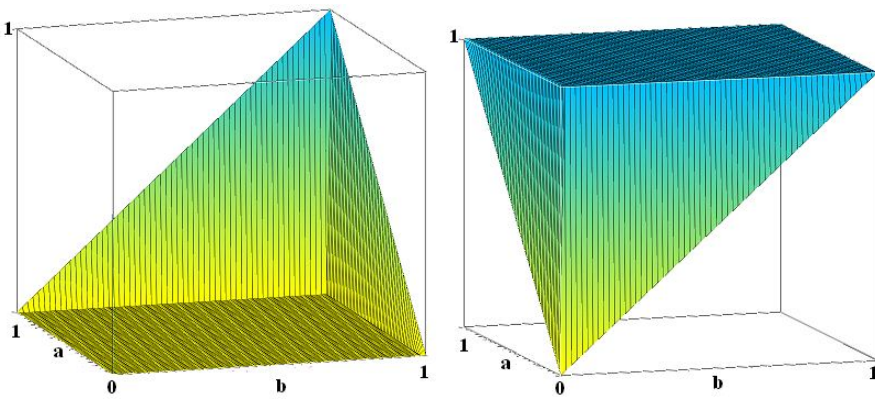
Rys.2.9. T-norma i s-norma Zadeha



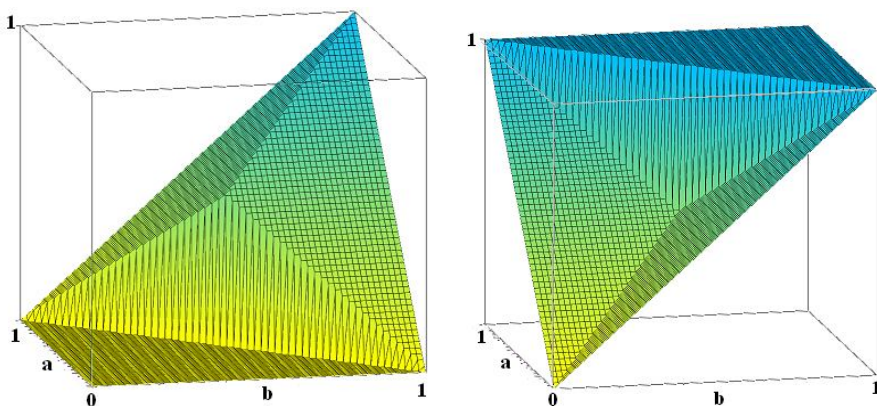
Rys.2.10. *T-norma algebraiczna i s-norma probabilistyczna*



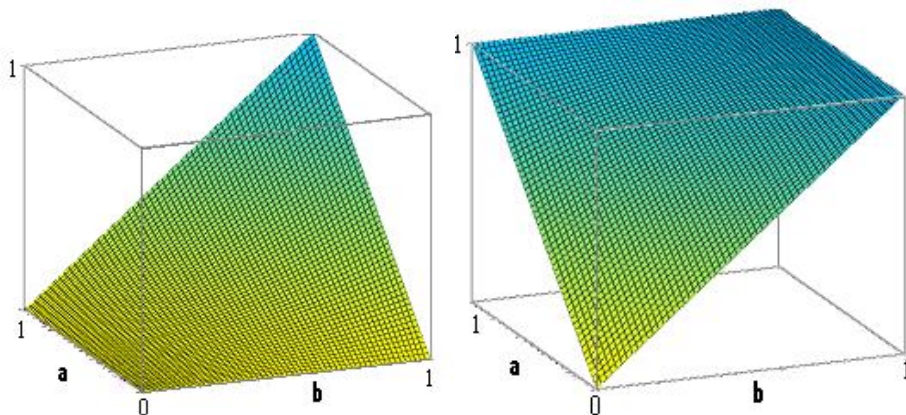
Rys.2.11. *T-norma i s-norma Łukaszewicza*



Rys.2.12. *T-norma i s-norma drastyczna*



Rys.2.13. T-norma i s-norma Fodora



Rys. 2.14. T-norma i s-norma Einsteina

2.3. Normy parametryczne

Opisane w poprzednich podrozdziałach normy trójkątne nie są jedynymi operacjami na zbiorach rozmytych. Stosowane są również funkcje, których wyniki można zmieniać w zależności od wartości użytych parametrów. W tym podrozdziale zostaną przedstawione niektóre z nich.

Przykładami funkcji tego typu są normy Yagera, definiowane wzorami:

$$T_y(a, b) = 1 - \min \left\{ 1, [(1-a)^w + (1-b)^w]^{\frac{1}{w}} \right\}$$

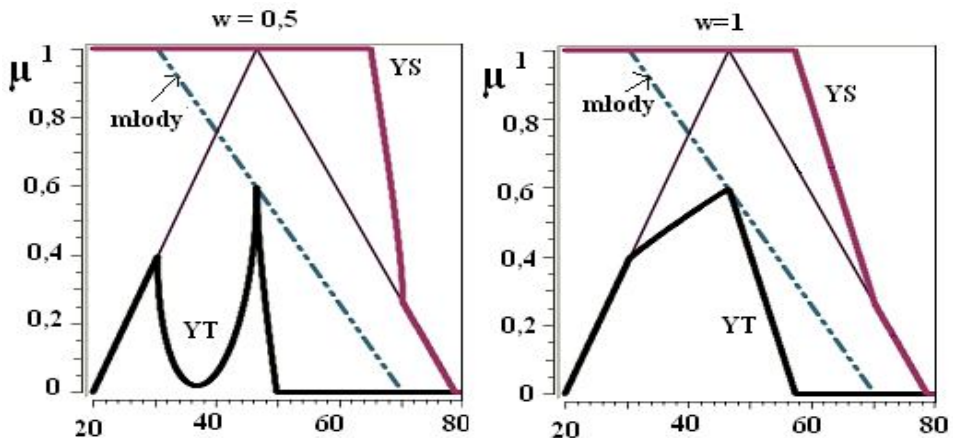
$$S_y(a, b) = \min \left\{ 1, (a^w + b^w)^{\frac{1}{w}} \right\}$$
(2.14)

Parametr w jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Przy $w \rightarrow 0$ operacje te przechodzą w drastyczne, dla $w=1$ stają się normami Łukaszevicza, jeśli zaś

$w \rightarrow \infty$ normami Zadeha.

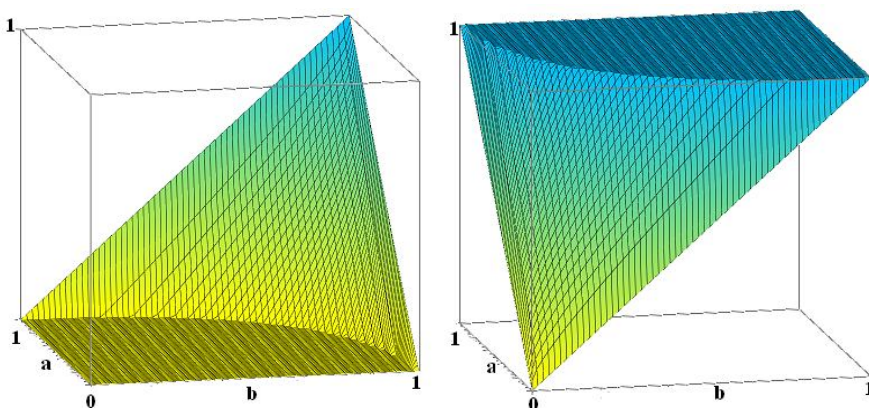
Przykład 2.8.

Na rys.2.15 przedstawiono t-normy (YT) oraz s-normy Yagera przy $w=0,5$ i $w=1$ dla przykładowych zbiorów rozmytych „młody człowiek” i „człowiek w średnim wieku”. Zbiory te scharakteryzowano odpowiednio funkcją L (młody) z parametrami $d=30$ i $g=70$ lat oraz Λ (w średnim wieku) z $d=20$, $c=45$, $g=80$ lat.



Rys.2.15. T-normy (YT) i s-normy (YS) Yagera przy wartościach $w=0,5$ i $w=1$ dla zbiorów rozmytych „młody człowiek” i „człowiek w średnim wieku”. Funkcja L (młody) ma parametry $d=30$ oraz $g=70$ lat, Λ (w średnim wieku) $d=20$, $c=45$, $g=80$ lat

Na rys. 2.16 przedstawiono trójwymiarowy wykres norm Yagera przy $w=0,5$. Jak widać normy te nie są trójkątne dla wszystkich w .



Rys. 2.16. T-norma i s-norma Yagera przy $w=0,5$

Parametrycznymi operacjami są także normy Hamachera (z parametrem r).

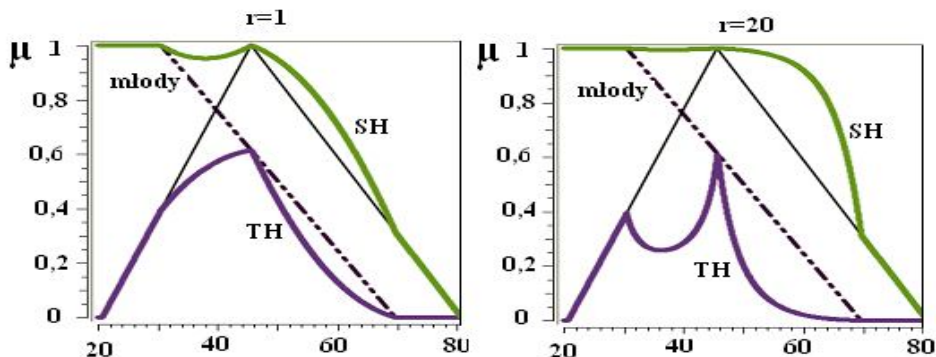
Można je przedstawić następującymi wzorami:

$$T_H(a,b) = \frac{ab}{r + (1-r)(a+b-ab)}$$

$$S_H(a,b) = \frac{a+b+(r-2)ab}{1+(r-1)ab}$$
(2.15)

Przykład 2.9.

Na rys. 2.17 przedstawiono t-normy oraz s-normy Hamachera dla zbiorów rozmytych z przykładu 2.7 przy parametrach $r=1$ i $r=20$.



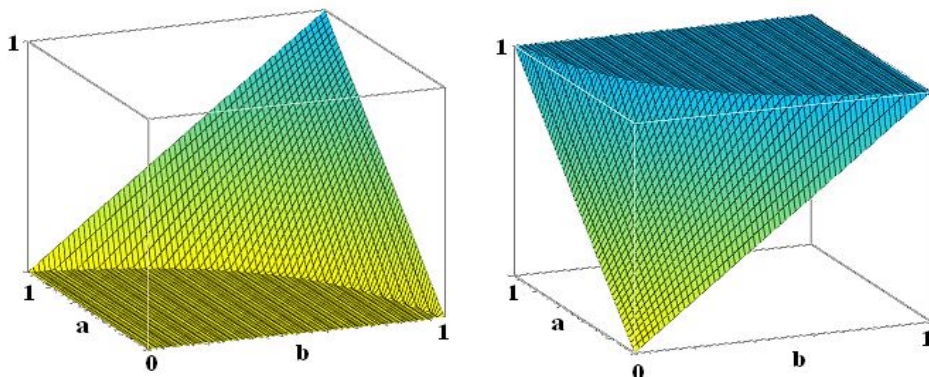
Rys.2.17. T-normy (TH) i s-norma (SH) Hamachera przy wartościach $r=1$ i $r=20$ dla zbiorów rozmytych „młody człowiek” i „człowiek w średnim wieku”. Funkcja L (młody) ma parametry $d=30$ oraz $g=70$ lat, Λ (w średnim wieku) $d=20$, $c=45$, $g=80$ lat

Normy Sugeno można przedstawić następującymi wzorami:

$$T_{\text{Sugeno}}(a,b) = \max [0, (1 + \alpha) \cdot (a + b - 1) - \alpha ab]$$

$$S_{\text{Sugeno}}(a,b) = \min [1, a + b - \alpha ab]$$
(2.16)

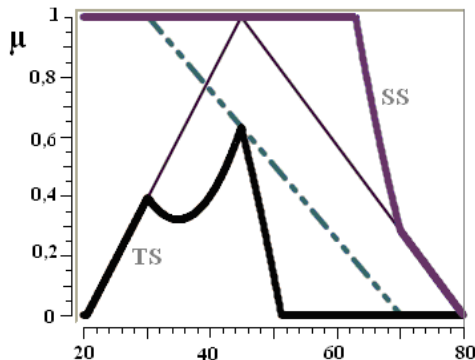
We wzorach 2.16 parametr $\alpha \geq -1$. Jeśli przyjmuje on wartość -1 normy te stają się operacjami algebraicznymi, przy $\alpha = 0$ przechodzą w logiczne a przy $\alpha \rightarrow \infty$ drastyczne.



Rys 2.18. T-norma i s-norma Sugeno przy $\alpha = 4$

Na rys. 2.18 przedstawiony został trójwymiarowy wykres norm Sugeno przy $\alpha=4$.
Przykład 2.10.

Porównajmy wynik t-normy i s-normy Sugeno przy $\alpha=4$ dla zbiorów rozmytych z przykładu 2.8 (rys. 2.19).



Rys.2.19. T-normy (TS) i s-normy (SS) Sugeno przy $\alpha=4$ dla zbiorów rozmytych „młody człowiek” i „człowiek w średnim wieku”. Funkcja L (młody) ma parametry $d=30$ oraz $g=70$ lat, Λ (w średnim wieku) $d=20$, $c=45$, $g=80$ lat

W literaturze znaleźć można inne normy parametryczne: Franka, Dubois i Prade’a, Schweizera i Sklara, Dombiego, Webera, Yu. Nie zostaną opisane w tym skrypcie, a zainteresowanych Czytelników odsyłam do literatury.

2.4. Operacje skompensowane

W pracy Zimmermana i Zysno wprowadzone zostały operacje skompensowane (ang. compensatory), w których parametr decyduje, czy dana operacja jest zbliżona do t-normy czy s-normy. Zdefiniowane zostały dwa rodzaje tych operacji: wykładnicza oraz liniowa. Wykładniczą określono wzorem:

$$O^e(a, b) = [T(a, b)]^{(1-\gamma)} [S(a, b)]^\gamma \quad (2.17)$$

Natomiast kombinacja liniowa została zdefiniowana następująco:

$$O^c(a, b) = (1 - \gamma)T(a, b) + \gamma S(a, b) \quad (2.18)$$

We wzorach 2.17 i 2.18 parametr $\gamma \in [0, 1]$ decyduje o stopniu podobieństwa do t-normy lub s-normy. $T(a, b)$ i $S(a, b)$ oznaczają odpowiednio dowolną t-normę oraz s-normę.

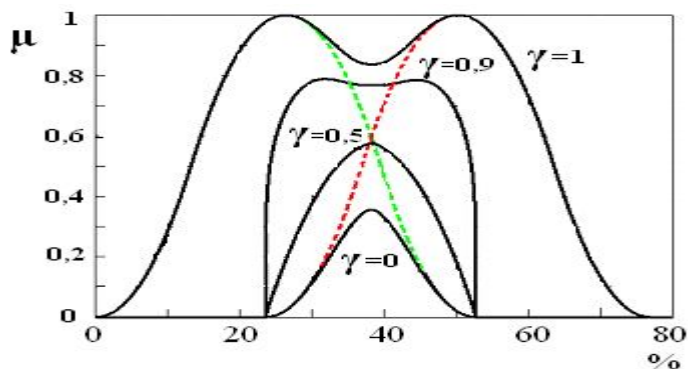
Przy zastosowaniu t-normy algebraicznej i s-normy probabilistycznej otrzymamy na podstawie wzoru 2.17 tzw. operator Zimmermana:

$$O^a(a, b) = (a \cdot b)^{1-\gamma} \cdot (a + b - ab)^\gamma = (a \cdot b)^{1-\gamma} [1 - (1-a) \cdot (1-b)]^\gamma \quad (2.19)$$

Przykład 2.11.

Niech będą dane dwa zbiory rozmyte *niska* i *średnia* frekwencja wyborcza przedstawione funkcjami $\pi_{25, 25}$ oraz $\pi_{25, 50}$. Na rys. 2.20 zilustrowano operacje

Zimmermana przy $\gamma = 0; 0,5; 0,9; 1$. Dla $\gamma = 0$ operator określony wzorem 2.19 staje się t-normą algebraiczną. Wraz ze wzrostem γ zbliża się coraz bardziej do s-normy probabilistycznej. Staje się nią przy $\gamma=1$.



Rys.2.20. Ilustracja operacji kompensacyjnych wyrażonych wzorem 2.19 dla zbiorów rozmytych „niska” i „średnia” frekwencja wyborcza modelowanych funkcjami $\pi_{25, 25}$ oraz $\pi_{25, 50}$

2. 5. Dopelnienia

W podrozdziale 2.1 zostało zdefiniowane dopełnienie standardowe do zbioru rozmytego. W sensie lingwistycznym dopełnienie do zbioru rozmytego A oznacza zbiór „nie A” i dlatego nazywane jest też negacją. Można zapisać ogólnie:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.20)$$

Funkcja negacji powinna spełniać następujące warunki:

- 1) Powinna być funkcją ściśle malejącą, co oznacza, że jeśli funkcja przynależności do zbioru rozmytego rośnie to funkcja przynależności do jego dopełnienia maleje.
- 2) Powinna być funkcją ciągłą.
- 3) Dopełnienie z dopełnienia do zbioru rozmytego A powinno być równe temu zbiorowi.

$$\neg(\neg A) = A$$

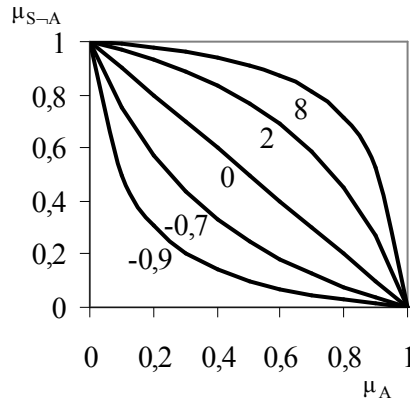
Funkcja negacji jest ścisła (ang. strict negation), jeśli spełnia warunki 1 i 2, natomiast, jeśli spełnia wszystkie trzy warunki nazywana jest silną (ang. strong negation). Najczęściej stosowane dopełnienie standardowe jest silną negacją.

Znane są także dopełnienia parametryczne: Sugeno i Yagera.

Dopełnienie Sugeno określa funkcja przynależności wyrażona wzorem zawierającym parametr $\lambda > -1$:

$$\mu_{S\neg A}(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda \mu_A(x)} \quad (2.21)$$

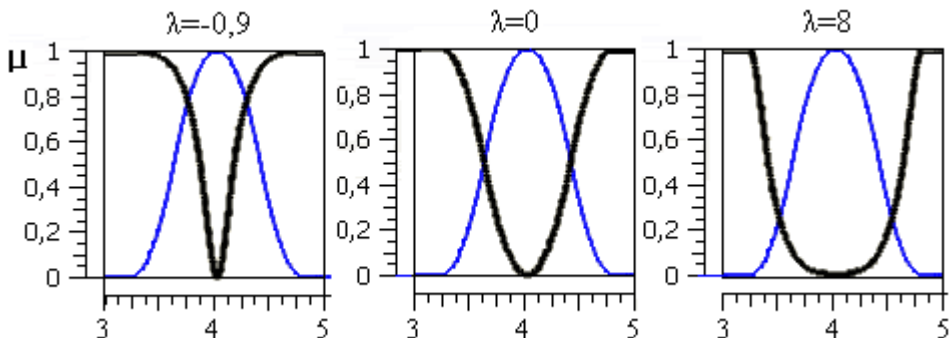
Łatwo zauważyć, że dla $\lambda=0$ wzór 2.21 definiuje dopełnienie standardowe. Na rys. 2.21 przedstawiono zależności funkcji przynależności do dopełnienia Sugeno od stopnia przynależności do zbioru rozmytego dla różnych wartości parametru λ .



Rys. 2.21. Dopełnienie Sugeno dla parametrów $\lambda = -0,9; -0,7; 0; 2; 8$

Przykład 2.12.

Przedstawmy na wykresach funkcję przynależności dopełnienia Sugeno do zbioru *dobry uczeń* o gaussowskiej funkcji przynależności (rys. 2.22)



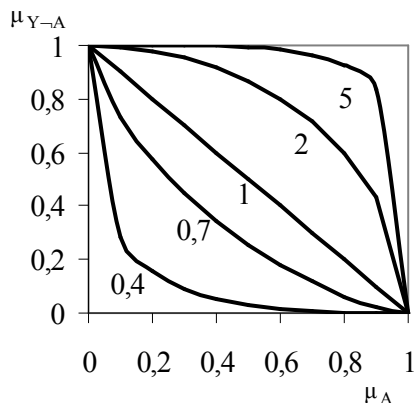
Rys. 2.22. Dopełnienia Sugeno (linia pogrubiona) do zbioru rozmytego „dobry uczeń” przy wartościach parametru $\lambda = -0,9; 0; 8$

Dopełnienie do zbioru rozmytego *dobry uczeń* osiąga duże wartości stopnia przynależności dla x dużo mniejszego i dużo większego od 4, co oznacza, że do zbioru rozmytego *nie dobry uczeń* należą uczniowie średni i bardzo dobrzy.

Innym rodzajem dopełnienia parametrycznego jest dopełnienie Yagera. Funkcja przynależności dla tej operacji wyraża się wzorem:

$$\mu_{Y-A}(x) = \{1 - [\mu_A(x)]^y\}^{1/y} \quad (2.22)$$

Występujący we wzorze 2.22 parametr y powinien być większy od 0 ($y > 0$). Na rys. 2.23 przedstawiono zależności stopni przynależności do dopełnienia Yagera od stopni przynależności do zbioru rozmytego.

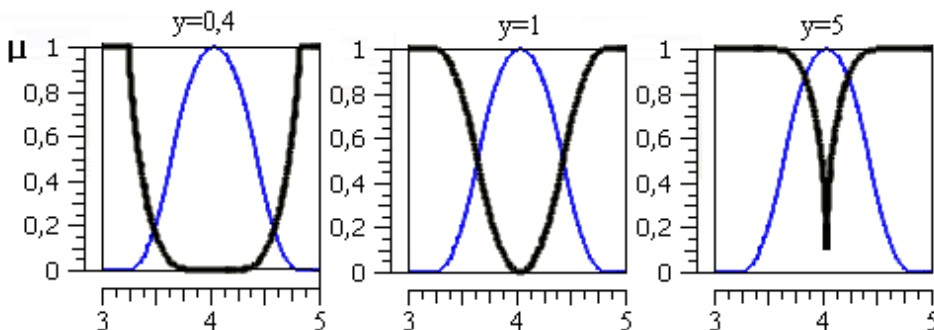


Rys. 2.23. Dopelnienia Yagera dla parametrów $y = 0,4; 0,7; 1; 2; 5$

Przy wartości parametru $y=1$ dopelnienie Yagera przechodzi w standardowe.

Przykład 2.13.

Na rys. 2.24 przedstawiono na wykresach dopelnienia Yagera (linie pogrubione) do zbioru rozmytego „dobry uczeń” dla parametrów $y=0,4; 1; 5$.



Rys. 2.24. Dopelnienia Yagera do zbioru rozmytego „dobry uczeń” (linie pogrubione) przy wartościach parametru $y = 0,4; 1; 5$

2.6. Różnice zbiorów rozmytych

Różnicą (A/B) zbiorów ostrych jest zbiór elementów należących do zbioru A i nie należących do zbioru B. Różnice zbiorów rozmytych otrzymuje się w wyniku działań na funkcjach przynależności. Odpowiednie główne operacje na zbiorach rozmytych mają również swoje odpowiedniki w operacjach różnic. Podstawową i najczęściej stosowaną jest różnica standardowa określona wzorem:

$$\mu_{A/B} = \min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] \quad (2.23)$$

Można również wyznaczać różnicę posługując się operacją logiczną. Otrzymana operacja nosi nazwę różnicy ograniczonej:

$$\mu_{A/B \text{ ograniczona}} = \max[0, \mu_A(x) - \mu_B(x)] \quad (2.24)$$

Różnica algebraiczna zbiorów rozmytych jest wyznaczana na podstawie wzoru:

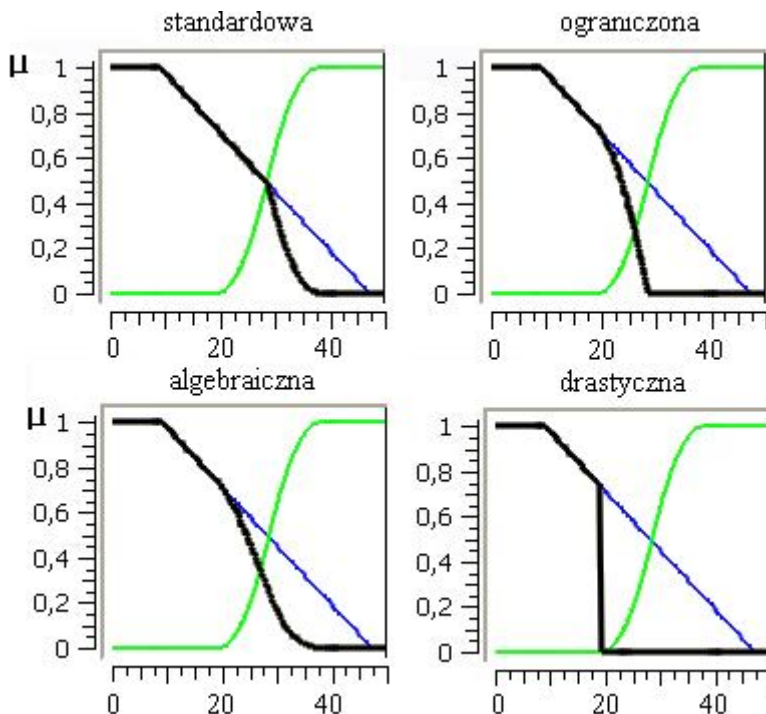
$$\mu_{A/B \text{ algebraiczna}} = \mu_A(x) \cdot [1 - \mu_B(x)] \quad (2.25)$$

Można również wyznaczać różnicę drastyczną według wzoru:

$$\mu_{A/B \text{ drastyczna}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu_A(x) < 1 \text{ i } \mu_B(x) > 0 \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 0 \\ 1 - \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Przykład 2.14.

Porównajmy różnice zbiorów rozmytych *niska* i *wysoka* temperatura przedstawione na rys. 2.25.



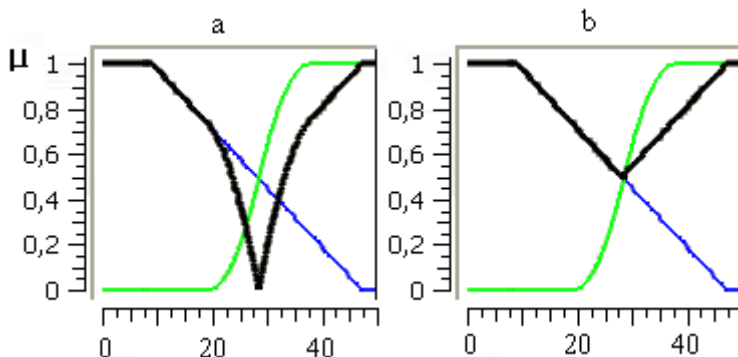
Rys. 2.25. Porównanie różnic (linia pogrubiona) zbiorów rozmytych „niska” i „wysoka” temperatura

W teorii zbiorów rozmytych definiowane są również różnice symetryczne odpowiadające w języku naturalnym sformułowaniu „albo- albo”. Najczęściej stosowaną różnicę symetryczną zdefiniowano następującym wzorem:

$$\mu_{A-B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)| \quad (2.27)$$

Stosowana jest także różnica symetryczna mnogościowa, określana wzorem:

$$A \div B = (A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B) \quad (2.28)$$



Rys. 2.26. Różnica symetryczna (a) i symetryczna mnogościowa (b) zbiorów rozmytych „niska” i „wysoka” temperatura

2.7. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych $A \times B$ jest określony poprzez funkcje przynależności dla każdej pary elementów z obu zbiorów. Są one wyznaczone jako t-normy stopni przynależności do A i B:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) * \mu_B(y) \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y \quad (2.29)$$

Najczęściej stosowanymi przy wyznaczaniu iloczynu kartezjańskiego t-normami są: iloczyn mnogościowy oraz iloczyn algebraiczny (odpowiednie wzory 2.30 i 2.31).

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y \quad (2.30)$$

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \mu_B(y) \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y \quad (2.31)$$

Przykład 2.15.

Wyznamy iloczyn kartezjański dwóch dyskretnych zbiorów rozmytych A i B określonych na uniwersum $\{3, 4, 5, 6\} \times \{-1, 0, 2\}$:

$$A = 0,1/3 + 0,4/4 + 1/5 + 0,7/6,$$

$$B = 0,3/-1 + 1/0 + 0,5/2$$

Iloczyn kartezjański tych zbiorów po zastosowaniu standardowej t-normy będzie miał postać:

$$A \times B = 0,1/(3, -1) + 0,1/(3, 0) + 0,1/(3, 2) + 0,3/(4, -1) + 0,4/(4, 0) + 0,4/(4, 2) + 0,3/(5, -1) + 1/(5, 0) + 0,5/(5, 2) + 0,3/(6, -1) + 0,7/(6, 0) + 0,5/(6, 2).$$

Jeśli, jako t-normę zastosujemy iloczyn (wzór 2.31) otrzymamy:

$$A \times B = 0,03/(3, -1) + 0,1/(3, 0) + 0,05/(3, 2) + 0,12/(4, -1) + 0,4/(4, 0) + 0,2/(4, 2) + 0,3/(5, -1) + 1/(5, 0) + 0,5/(5, 2) + 0,21/(6, -1) + 0,7/(6, 0) + 0,35/(6, 2).$$

ROZDZIAŁ 3

RELACJE ROZMYTE

3.1. Relacje ostre i rozmyte.....	36
3.2. Podstawowe działania na relacjach rozmytych.....	37
3.3. Relacje binarne określone na pojedynczym zbiorze.....	39
3.4. Projekcja i rozszerzenie cylindryczne.....	41

3.1. Relacje ostre i rozmyte

Relacja ostra określa istnienie lub brak związku, oddziaływania czy połączenia pomiędzy elementami dwu lub więcej zbiorów. W takim konwencjonalnym podejściu nie można zdefiniować siły (wagi) tych zależności. Koncepcja relacji rozmytych pozwala przyporządkować do danego połączenia elementów stopień przynależności na tej samej zasadzie, jak w przypadku zbiorów rozmytych.

Relacja pomiędzy elementami zbiorów ostrych X_1, X_2, \dots, X_k jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego: $R(X_1, X_2, \dots, X_k) \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$. Ponieważ może być traktowana jako zbiór, podstawowe działania, takie, jak suma, przecięcie (iloczyn), dopełnienie, zawieranie, z pewnymi modyfikacjami mają zastosowanie do relacji. Tak więc w podejściu klasycznym (ostrym) może być definiowana funkcją charakterystyczną χ , która przyjmuje wartość 1 lub 0 (istnienie lub brak związku). Relacja rozmyta jest zbiorem rozmytym określonym na iloczynie kartezjańskim zbiorów ostrych. Dla uproszczenia rozpatrzmy relację dwuwymiarową $R(x, y)$. Niech będą dane dwa zbiory ostre X i Y . Relację rozmytą można przedstawić jako zbiór uporządkowanych par:

$$R(x, y) = \{(x, y), \mu_R(x, y)\} \quad x \in X, y \in Y \quad \mu_R(x, y) \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Tak więc każdej parze elementów jest przyporządkowany stopień przynależności, określający powiązanie między nimi. Jeśli zbiory X i Y składają się ze skończonej liczby elementów, relacja rozmyta może być zobrazowana w postaci macierzy:

$$R = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \dots & \mu_R(x_1, y_m) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots & \mu_R(x_2, y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_R(x_k, y_1) & \mu_R(x_k, y_2) & \dots & \mu_R(x_k, y_m) \end{array} \right] & \end{matrix} \quad (3.2)$$

Jeśli funkcje przynależności przyjmują tylko jedną z dwu wartości 0 lub 1 relacja rozmyta przechodzi w ostrą. Dla zilustrowania różnicy pomiędzy relacją ostrą i rozmytą przeanalizujemy następujący przykład.

Przykład 3.1.

Niech będą dane dwa zbiory: kobiety i mężczyźni. Zarobki kobiet w zł wynoszą: Anna - 2500, Ewa - 3500, Iza - 4500; mężczyźni: Adam - 2500, Jan - 3600, Robert - 4100, Hubert - 4900. Relacja ostra *kobieta zarabiająca tyle samo co mężczyzna* będzie określona funkcjami charakterystycznymi przedstawionymi w macierzy:

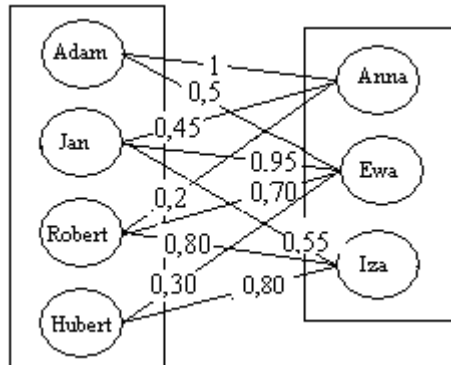
$$\begin{array}{c}
 \text{Adam}_{2,500} \quad \text{Jan}_{3,400} \quad \text{Robert}_{4,100} \quad \text{Hubert}_{4,900} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 \text{Anna}_{2,500} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{Ewa}_{3,500} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{Iza}_{4,500} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Występuje tu tylko jedna jedynka, a pozostałe funkcje charakterystyczne są zerami. Utwórzmy relację rozmytą dobierając funkcje charakterystyczne według zasady: $\mu_R = 1 - | \text{zarobki kobiety} - \text{zarobki mężczyzny} | / 2000$ (jeśli $\mu_R \geq 0$ w przeciwnym razie 0). Otrzymamy relację rozmytą *kobieta zarabiająca porównywalnie z mężczyzną*, którą przedstawia macierz:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c}
 \text{Adam}_{2,500} \quad \text{Jan}_{3,400} \quad \text{Robert}_{4,100} \quad \text{Hubert}_{4,900} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 \text{Anna}_{2,500} & 1 & 0,45 & 0,2 & 0 \\
 \text{Ewa}_{3,500} & 0,5 & 0,95 & 0,70 & 0,30 \\
 \text{Iza}_{4,500} & 0 & 0,55 & 0,80 & 0,80
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Relacja rozmyta może być przedstawiana w postaci grafu rozmytego.
Przykład 3.2.

Przedstawmy w postaci grafu relację rozmytą z przykładu 3.1.



Rys. 3.1. Graf rozmyty relacji z przykładu 3.1

3.2. Podstawowe działania na relacjach rozmytych

Relacje rozmyte można traktować jako wielowymiarowe zbiory rozmyte i przeprowadzać na nich operacje właściwe dla tych zbiorów.

Przykład 3.3.

Oznaczmy w przykładzie poprzednim przez x – staż pracy kobiet, który dla Anny wynosi 10, Ewy – 30, Izy – 20 lat, a przez y staż pracy mężczyzn ze zbioru {Adam – 10, Jan – 5, Robert – 20, Hubert – 15 lat}

Utwórzmy relację rozmytą T *kobieta o dłuższym stażu pracy niż mężczyzna*

i przeprowadźmy podstawowe działania na relacjach R (przykład 3.2) i T .

$$T = \begin{array}{c} \text{Anna}_{10} \\ \text{Ewa}_{30} \\ \text{Iza}_{20} \end{array} \begin{array}{c} \text{Adam}_{10} \\ \text{Jan}_5 \\ \text{Robert}_{20} \\ \text{Hubert}_5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Relacja *kobieta o nie dłuższym stażu niż mężczyzna* będzie dopełnieniem do relacji T . Jeśli zastosujemy operację mnogościową uzyskamy następującą postać relacji rozmytej $\neg T$:

$$\neg T = \begin{array}{c} \text{Anna}_{10} \\ \text{Ewa}_{30} \\ \text{Iza}_{20} \end{array} \begin{array}{c} \text{Adam}_{10} \\ \text{Jan}_5 \\ \text{Robert}_{20} \\ \text{Hubert}_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Relacja złożona *kobieta o dłuższym stażu i zarabiająca porównywalnie z mężczyzną* będzie wynikiem działania t-normy na relacje T i R , natomiast relacja rozmyta *kobieta o porównywalnych zarobkach mężczyzną lub nie dłuższym stażu pracy niż mężczyzna* będzie wynikiem działania s-normy na relacje R i $\neg T$. Jeśli zastosujemy działania mnogościowe w wyniku otrzymujemy:

$$T \cap R = \begin{array}{c} \text{Anna} \\ \text{Ewa} \\ \text{Iza} \end{array} \begin{array}{c} \text{Adam} \\ \text{Jan} \\ \text{Robert} \\ \text{Hubert} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,95 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0,55 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$R \cup \neg T = \begin{array}{c} \text{Anna} \\ \text{Ewa} \\ \text{Iza} \end{array} \begin{array}{c} \text{Adam} \\ \text{Jan} \\ \text{Robert} \\ \text{Hubert} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,95 & 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,55 & 1 & 0,80 \end{bmatrix}$$

W praktycznych zastosowaniach szczególne znaczenie ma złożenie zbioru rozmytego ($A \subseteq X$) i relacji rozmytej ($R \subseteq X \times Y$). Jest nim zbiór rozmyty ($B \subseteq Y$) zdefiniowany następująco:

$$B = A \circ R \quad (3.3)$$

Funkcja przynależności do złożenia zbioru rozmytego i relacji rozmytej wyraża

się wzorem:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{ \mu_A(x) * \mu_R(x, y) \} \quad (3.4)$$

Jeśli uniwersum X jest zbiorem o skończonej liczbie elementów i zastosowana jest mnogościowa t -norma, wzór 3.4 przechodzi w 3.5:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} \{ \min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)] \} \quad (3.5)$$

Przykład 3.4.

Przyjmijmy $X = \{x_1, x_2\}$ oraz $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ i utwórzmy zbiór rozmyty $A = 0,4/x_1 + 1/x_2$ na uniwersum X oraz relację S :

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0,6 & 1 \end{array} \right. \\ x_2 & \left. \begin{array}{ccc} 0,5 & 0,1 & 0,7 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

W wyniku złożenia zbioru rozmytego A i relacji rozmytej S powstaje zbiór B :

$$B = \mu_B(y_1) / y_1 + \mu_B(y_2) / y_2 + \mu_B(y_3) / y_3$$

Przy zastosowaniu mnogościowej t -normy funkcje przynależności do zbioru B będą odpowiednio równe:

$$\mu_B(y_1) = \max [\min(0,4; 1); \min(1; 0,5)] = \max [0,4; 0,5] = 0,5$$

$$\mu_B(y_2) = \max [\min(0,4; 0,6); \min(1; 0,1)] = \max [0,4; 0,1] = 0,4$$

$$\mu_B(y_3) = \max [\min(0,4; 1); \min(1; 0,7)] = \max [0,4; 0,7] = 0,7$$

W rezultacie otrzymujemy zbiór rozmyty:

$$B = 0,5 / y_1 + 0,4 / y_2 + 0,7 / y_3$$

Ważnymi działaniami są również złożenia relacji. Złożeniem typu supremum- T -norma relacji rozmytych $R(x, y)$ i $S(y, z)$ jest relacja $R \circ S$ o funkcjach przynależności określonych wzorem:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} [\mu_R(x, y) * \mu_S(y, z)] \quad (3.6)$$

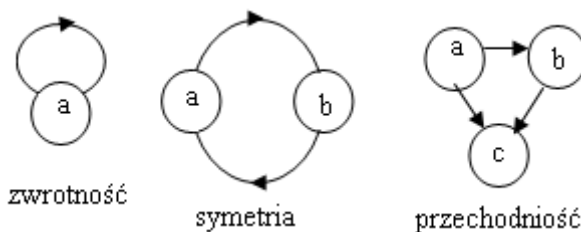
Stosowane jest także złożenie typu infimum- S -norma określone następująco:

$$\mu_{R \bullet S}(x, z) = \inf_{y \in Y} [\mu_R(x, y) * \mu_S(y, z)] \quad (3.7)$$

W przestrzeniach przeliczalnych supremum przechodzi w maksimum a infimum w minimum.

3.3. Relacje binarne określone na pojedynczym zbiorze

Binarne relacje mogą być definiowane nie tylko na dwóch zbiorach X i Y lecz także na pojedynczym zbiorze X ($R(X, X)$). Można wyróżnić kilka typów takich relacji o różnych własnościach. Podstawowe własności relacji to zwrotność (ang. reflexivity), symetryczność (ang. symmetry) i przechodniość (transitivity) (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Charakterystyczne składniki relacji zwrotnych, symetrycznych i przechodnich

Relacja rozmyta jest zwrotna, jeśli dla wszystkich x , $0 < \varepsilon < 1$:

$$\mu_R(x, x) \geq \varepsilon \quad (3.8)$$

Relacja rozmyta jest symetryczna, jeśli dla wszystkich wartości x_i, x_j ($x_i \in X, x_j \in X$)

$$\mu_R(x_i, x_j) = \mu_R(x_j, x_i) \quad (3.9)$$

Jeśli dla wszystkich x spełniona jest nierówność

$$\mu_R(x_i, x_j) \neq \mu_R(x_j, x_i) \quad (3.10)$$

to relacja jest niesymetryczna. Niesymetryczna relacja spełniająca dodatkowo warunek, że

$$\mu_R(x_i, x_j) > 0 \text{ i } \mu_R(x_j, x_i) > 0 \rightarrow x_i = x_j \quad (3.11)$$

nazywana jest antysymetryczną.

Relacja rozmyta jest przechodnia (lub dokładniej max-min przechodnia), jeśli:

$$\mu_R(x_i, x_k) \geq \max \min[\mu_R(x_i, x_j), \mu_R(x_j, x_k)] \quad (3.12)$$

Rozmyta relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywana jest relacją równoważności (ang. equivalence relation).

Przykład 3.5.

Utwórzmy rozmytą relację równoważności określoną na zbiorze $\{a, b, c, d\}$.

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0 & 0,4 \\ 0,8 & 1 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dla każdego elementu a, b, c, d jest spełniony warunek 3.8 przy $\varepsilon=1$. Łatwo sprawdzić, że spełniony jest warunek 3.9. Dla przykładowych elementów b, d otrzymamy $\mu_R(b, d) = 0,4 = \mu_R(d, b)$. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek przechodniości dla elementów a, c, d : $\mu_R(a, d) = 0,4 > \max \min[\mu_R(a, c), \mu_R(c, d)] = \max \min[0, 0] = 0$.

Relacja rozmyta zwrotna i symetryczna jest nazywana relacją zgodności (ang. compatibility relation) lub tolerancji (ang. tolerance relation).

Przykład 3.6.

Utwórzmy relacje zgodności określoną na zbiorze liczb {5, 6, 7, 8}

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Łatwo sprawdzić, że relacja ta jest zwrotna i symetryczna. Nie jest natomiast przechodnia, gdyż dla przykładu $\mu_R(5, 8) = 0,3 < \min [\mu_R(5, 6), \mu_R(6,8)] = \min [0,7; 0,5] = 0,5$.

Oddzielną grupę stanowią relacje przechodnie zwane też rozmytymi relacjami porządku (ang. ordering fuzzy relation). Jeśli relacja jest przechodnia, a przy tym antysymetryczna i antyzwrotna, to jest nazywana relacją ścisłego porządku. Relacja przechodnia i antysymetryczna jest relacją częściowego porządku.

W tabeli 3.1 zebrano własności głównych typów relacji rozmytych.

Tabela 3.1. Główne typy relacji rozmytych $R(X,X)$

	zwrotna	anty-zwrotna	symetryczna	anty-symetryczna	przechodnia
Równoważności					
Zgodności					
Porządku					

3.4. Projekcja i rozszerzenie cylindryczne

Projekcja (ang. projection) pozwala na uzyskanie relacji o mniejszym wymiarze. W przypadku relacji dwuwymiarowej utworzonej na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ możemy utworzyć projekcje na przestrzeń X lub Y . Projekcja na przestrzeń X wyraża się wzorem:

$$Proj_X(B) = \int_X \sup_{y \in Y} \mu_B(x, y) / x \tag{3.13}$$

Projekcję na przestrzeń Y przedstawia wzór:

$$Proj_Y(B) = \int_Y \sup_{x \in X} \mu_B(x, y) / y \tag{3.14}$$

Projekcja może być interpretowana, jako cień relacji rozmytej na określonej oś układu współrzędnych.

Przykład 3.7.

Utwórzmy dwie projekcje relacji rozmytej R z przykładu 3.1 (*kobieta zarabiająca porównywalnie z mężczyzną*). Projekcja na zbiór *kobiety* ma postać:

$\text{Proj}_{\text{kobiety}}(\mathbf{R}) = 1/\text{Anna} + 0,95/\text{Ewa} + 0,8/\text{Iza}$

Projekcja na zbiór *mężczyźni*:

$\text{Proj}_{\text{mężczyźni}}(\mathbf{R}) = 1/\text{Adam} + 0,95/\text{Jan} + 0,8/\text{Robert} + 0,8/\text{Hubert}$

Rozszerzenie cylindryczne (ang. cylindric extension) pozwala na uzyskanie zbioru lub relacji rozmytej o większej wymiarowości:

$$\text{Ce}(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) / (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.15)$$

Przykład 3.8.

Niech będzie dany zbiór rozmyty \mathbf{A} utworzony w przestrzeni dyskretnej $\{x_1, x_2, x_3\}$: $\mathbf{A} = 0,1/x_1 + 0,9/x_2 + 0,3/x_3$. Utwórzmy rozszerzenie cylindryczne tego zbioru na przestrzeń dyskretną $\{y_1, y_2\}$:

$\text{Ce}(\mathbf{A}) = 0,1/(x_1, y_1) + 0,9/(x_2, y_1) + 0,3/(x_3, y_1) + 0,1/(x_1, y_2) + 0,9/(x_2, y_2) + 0,3/(x_3, y_2)$

ROZDZIAŁ 4

ARYTMETYKA ROZMYTA

4.1. Liczby rozmyte.....	44
4.2. Arytmetyka liczb rozmytych.....	45
4.3. Liczby trójkątne.....	48
4.4. Porównywanie liczb rozmytych.....	49
4.5. Liczby LP.....	50
4.6. Działania na liczbach LP.....	51

4.1. Liczby rozmyte

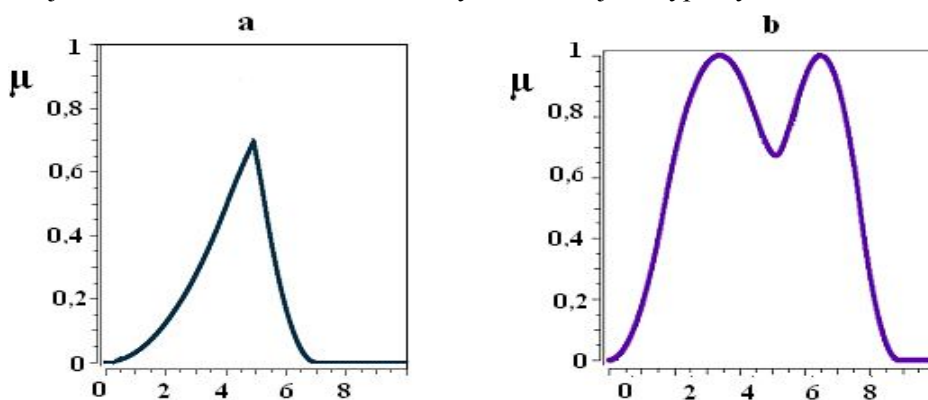
Szczególnym rodzajem zbiorów rozmytych są liczby oraz przedziały rozmyte. Liczbą rozmyta jest zbiór rozmyty o ograniczonym nośniku w dziedzinie liczb rzeczywistych, normalny (czyli o wysokości równej 1) oraz wypukły.

Zbiór rozmyty jest wypukły, jeśli dla dowolnych punktów x_1 , x_2 oraz dowolnej liczby λ zawierającej się w przedziale $[0,1]$ spełniony jest warunek:

$$\mu[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu(x_1), \mu(x_2)] \quad (4.1)$$

Przykład 4.1.

Na rys. 4.1 przedstawiono przykłady zbiorów rozmytych, które nie są liczbami rozmytymi. Zbiór na rys. 4.1a nie jest liczbą rozmytą ponieważ jego wysokość nie jest równa 1, natomiast zbiór na rys. 4.1b nie jest wypukły.

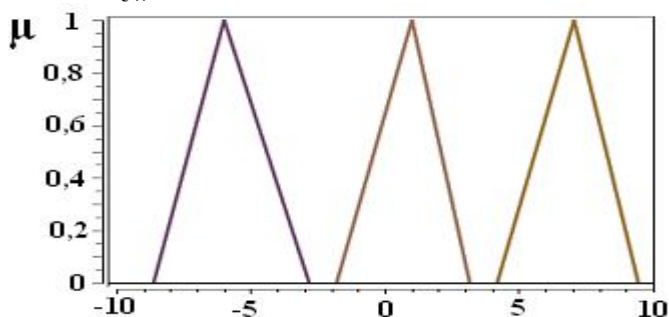


Rys. 4.1. Przykładowe zbiory rozmyte, które nie są liczbami rozmytymi

Liczby rozmyte można podzielić na: dodatnie, ujemne i mieszane.

Przykład 4.2.

Na rys. 4.2 przedstawiono trzy przykładowe liczby: ujemną „około -6”, mieszaną „około 1” oraz dodatnią „około 7”



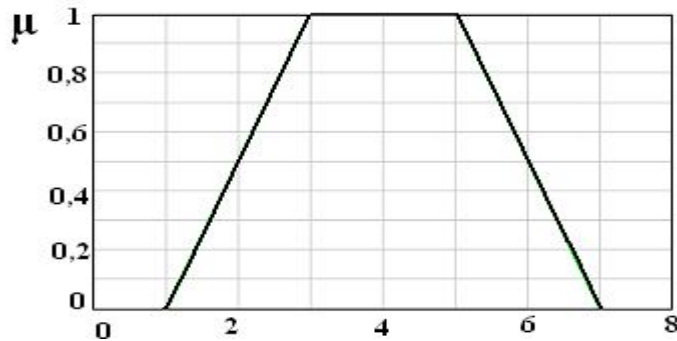
Rys. 4.2. Przykładowe liczby rozmyte: od lewej ujemna -6, mieszana 1, dodatnia 7

Wszystkie przedstawione na rys. 4.2 liczby są trójkątne. Są one często stosowane

ze względu na łatwość ich dodawania i odejmowania. Szczególny typ liczb rozmytych stanowią przedziały rozmyte.

Przykład 4.3.

Nieprecyzyjne sformułowanie „cena owoców waha się od około 3 do około 5 złotych” można przedstawić przy zastosowaniu przedziału rozmytego przedstawionego na rys. 4.3.



Rys. 4.3. Przedział rozmyty $[[3,5]]$.

4.2. Arytmetyka liczb rozmytych

Podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych wynikają bezpośrednio z zasady rozszerzania opisaną w rozdziale 1. Jeżeli dane są dwie liczby rozmyte A, B to działania na nich mogą być traktowane, jako odwzorowanie zbiorów rozmytych A, B przy pomocy odpowiednich funkcji:

$z = f(x, y) = x + y$ przy dodawaniu, $z = f(x, y) = x - y$ przy odejmowaniu, $z = f(x, y) = x \cdot y$ przy mnożeniu i $z = f(x, y) = x : y$ przy dzieleniu. Należy przy tym pamiętać, że dziedziną z jest, podobnie jak x i y zbiór liczb rzeczywistych. Tak więc, działania na liczbach rozmytych sprowadzają się do wyznaczenia funkcji przynależności zgodnie z wzorami:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} [\mu_A(x) * \mu_B(y)] \quad (4.2)$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{z=x-y} [\mu_A(x) * \mu_A(y)] \quad (4.3)$$

$$\mu_{A \times B}(z) = \sup_{z=x \times y} [\mu_A(x) * \mu_B(y)] \quad (4.4)$$

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{z=x/y} [\mu_A(x) * \mu_B(y)] \quad (4.5)$$

Interesujące ze względu na praktyczne zastosowania są liczby rozmyte o ciągłych funkcjach przynależności. Tylko dla lepszego zrozumienia działań 4.2 - 4.5 w przykładzie 4.4 zostały zastosowane funkcje dyskretne.

Przykład 4.4.

Niech będą dane dwie liczby rozmyte A – około 4 i B – około 2:

$$A = 0,4/3 + 1/4 + 0,3/6 \quad B = 0,2/1 + 1/2 + 0,4/3$$

Przy zastosowaniu jako t-normy operacji minimum dla odpowiednich par x, y otrzymamy wartości zawarte w tabeli 4.1. Pogrubiono liczby, dla których funkcja przynależności jest równa 1.

Tabela 4.1. Wyniki obliczeń dla liczb rozmytych A i B

x	y	x+y	x-y	xy	x/y	$\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$
3	1	4	2	3	3	0,2
3	2	5	1	6	1,5	0,4
3	3	6	0	9	1	0,4
4	1	5	3	4	4	0,2
4	2	6	2	8	2	1
4	3	7	1	12	1,3	0,4
6	1	7	5	6	6	0,2
6	2	8	4	12	3	0,3
6	3	9	3	18	2	0,3

$$\mu_{A+B} = \max[0,2]/4 + \max[0,4; 0,2]/5 + \max[0,4; 1]/6 + \max[0,4; 0,2]/7 + \max[0,3]/8 + \max[0,3]/9 = 0,2/4 + 0,4/5 + 1/6 + 0,4/7 + 0,3/8 + 0,3/9$$

$$\mu_{A-B} = \max[0,4]/0 + \max[0,4; 0,4]/1 + \max[0,2; 1]/2 + \max[0,2; 0,3]/3 + \max[0,3]/4 = 0,4/0 + 0,4/1 + 1/2 + 0,3/3 + 0,3/4$$

$$\mu_{A \times B} = 0,2/3 + 0,2/4 + \max[0,4; 0,2]/6 + 1/8 + \max[0,4; 0,3]/12 + 0,3/18 = 0,2/3 + 0,2/4 + 0,4/6 + 1/8 + 0,4/12 + 0,3/18$$

$$\mu_{A/B} = 0,4/1 + 0,4/1,3 + 0,4/1,5 + 1/2 + 0,3/3 + 0,2/4 + 0,2/6$$

W wyniku dodawania otrzymujemy liczbę *około 6*, odejmowania *około 2*, mnożenia *około 8* i dzielenia *około 2* zgodnie z klasyczną arytmetyką.

Pozostałe działania na liczbach rozmytych są również konsekwencją zasady rozszerzania. Liczbę przeciwną uzyskujemy w wyniku działania funkcji $f(x)=-x$. Zgodnie z zasadą rozszerzania funkcja przynależności wyrazi się wzorem:

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x) \quad (4.6)$$

Liczba odwrotna jest obliczana zgodnie ze wzorem:

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1}) \quad (4.7)$$

Warunkiem obliczania liczby odwrotnej jest, by była ona dodatnia lub ujemna. Jeśli jest mieszana, to zbiór rozmyty o funkcji przynależności wyliczonej ze wzoru 4.7 nie jest wypukły, a więc nie jest liczbą rozmytą.

Przykład 4.5.

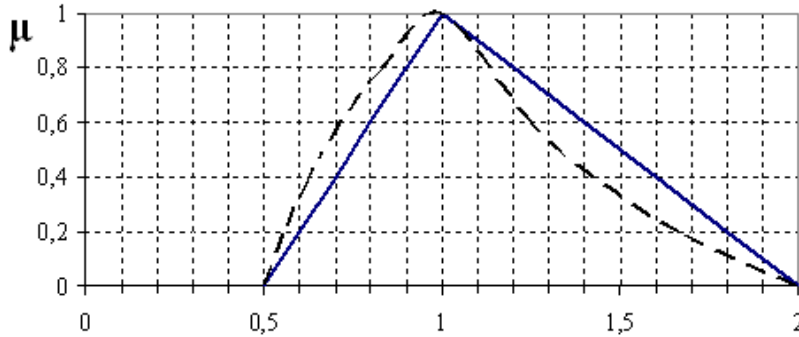
Na rys. 4.4 przedstawiono liczbę rozmytą trójkątną 1, której funkcja przynależności przecina oś x w wartościach 0,5 i 2 oraz liczbę odwrotną (linia przerywana). Nie jest to już liczba trójkątna.

Przykład 4.6.

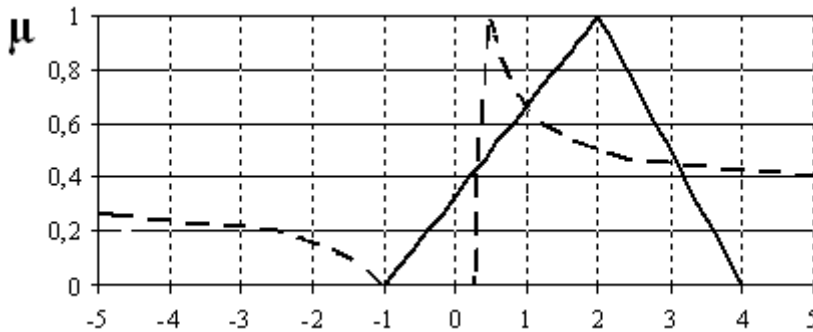
Niech będzie dana liczba rozmyta mieszana 2 (rys. 4.5). Funkcja przynależności obliczona ze wzoru 4.7 (linia przerywana) nie jest wypukła, tak więc nie jest to liczba rozmyta.

Skalowanie liczb rozmytych czyli mnożenie przez dowolną liczbę $s \neq 0$ sprowadza się do wzoru:

$$\mu_{sA}(x) = \mu_A(x/s) \quad (4.8)$$



Rys. 4.4. Liczba rozmyta 1 (linia ciągła) i liczba odwrotna (linia przerywana)



Rys. 4.5. Liczba rozmyta mieszana i zbiór rozmyty o funkcji przynależności obliczonej ze wzoru 4.7, który nie jest liczbą rozmytą

W uproszczonej metodzie obliczeń na liczbach rozmytych stosowane są α -przekroje. Oznaczmy skrajne wartości przedziałów przekrojów A_α i B_α odpowiednio przez a_α^l i b_α^l z lewej oraz a_α^p i b_α^p z prawej strony. Obliczenie arytmetyczne sprowadzają się do następujących formuł:

$$(A + B)_\alpha = [a_\alpha^l + b_\alpha^l, a_\alpha^p + b_\alpha^p]$$

$$(A - B)_\alpha = \{\min[(a_\alpha^l - b_\alpha^l), (a_\alpha^p - b_\alpha^p)], \max[(a_\alpha^p - b_\alpha^p), (a_\alpha^l - b_\alpha^l)]\}$$

$$(A \cdot B)_\alpha = [\min(a_\alpha^l b_\alpha^l, a_\alpha^l b_\alpha^p, a_\alpha^p b_\alpha^l, a_\alpha^p b_\alpha^p), \max(a_\alpha^l b_\alpha^l, a_\alpha^l b_\alpha^p, a_\alpha^p b_\alpha^l, a_\alpha^p b_\alpha^p)]$$

$$(A/B)_\alpha = [\min(a_\alpha^l / b_\alpha^l, a_\alpha^l / b_\alpha^p, a_\alpha^p / b_\alpha^l, a_\alpha^p / b_\alpha^p), \max(a_\alpha^l / b_\alpha^l, a_\alpha^l / b_\alpha^p, a_\alpha^p / b_\alpha^l, a_\alpha^p / b_\alpha^p)]$$

Poprawne odwzorowanie wymaga dużej liczby przekrojów, nie jest więc efektywne obliczeniowo.

4.3. Liczby trójkątne

Przy ciągłych funkcjach przynależności działania na liczbach rozmytych nie są łatwe. Najprościej wykonać dodawanie i odejmowanie liczb trójkątnych, gdyż wyniki tych działań są także liczbami trójkątnymi. Dla liczb trójkątnych, które mogą być definiowane tylko przez podanie rdzenia i wartości skrajnych przekroju na poziomie $\alpha=0$ działania dodawania i odejmowania są bardzo proste. Nie dotyczy to jednak mnożenia i dzielenia.

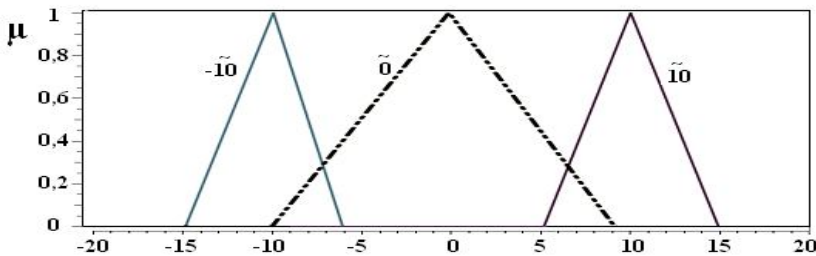
Oznaczmy skrajne wartości dwu liczb trójkątnych A i B odpowiednio przez a_l, a_p oraz b_l, b_p a ich rdzenie przez a, b . Możemy zapisać: $A = [a_l, a, a_p]$ oraz $B = [b_l, b, b_p]$. Sumę i różnicę tych liczb wyznaczmy następująco:

$$A+B = [a_l+b_l, a+b, a_p+b_p] \quad (4.9)$$

$$A-B = [\min(a_l-b_l, a_l-b_p), a-b, \max(a_p-b_p, a_p-b_l)] \quad (4.10)$$

Przykład 4.6.

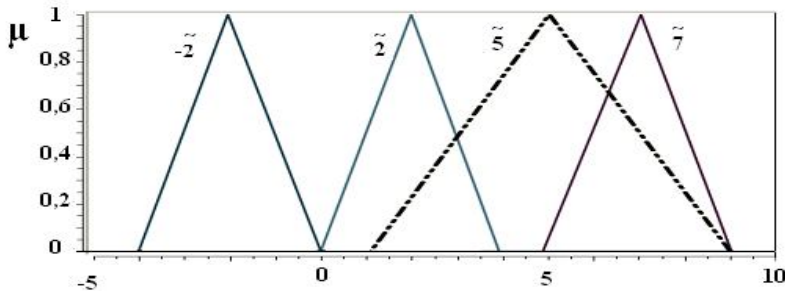
Niech będą dane dwie liczby trójkątne $[-15, -10, -6]$ oraz $[5, 10, 15]$. W wyniku dodawania otrzymamy rozmytą liczbę $0 - [-10, 0, 9]$ (rys. 4.6).



Rys. 4.6. Dodawanie liczb trójkątnych (wynik dodawania rozmyte 0)

Przykład 4.7.

Odejmijmy rozmyte liczby trójkątne: $\tilde{7} - \tilde{2} = [5, 7, 9] - [0, 2, 4]$. W wyniku otrzymujemy $\tilde{5} = [1, 5, 9]$ (na rys. 4.7 przedstawiona linią przerywaną).



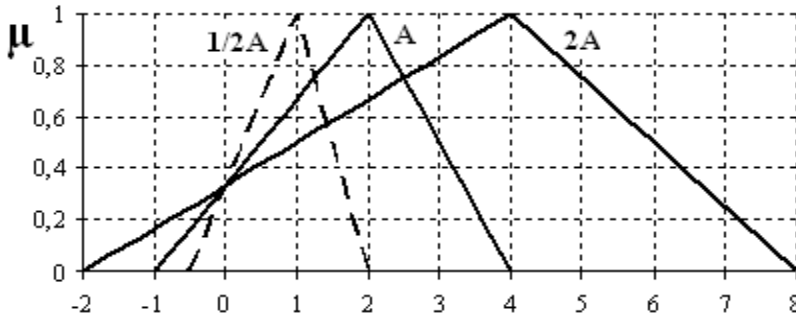
Rys. 4.7. Odejmowanie trójkątnych liczb rozmytych

Odejmowanie można sprowadzić do dodawania liczby przeciwnej. Liczbą trójkątną przeciwną do liczby $A=[a_l, a, a_p]$ jest $-A = [-a_p, -a, -a_l]$. Liczbą

przeciwną do przedstawionej na rys.4.5 liczby $\tilde{2} = [0, 2, 4]$ jest $-\tilde{2} = [-4, -2, 0]$. Skalowanie liczb trójkątnych jest również bardzo łatwe obliczeniowo.

Przykład 4.8.

Na rys. 4.6 przedstawiono trójkątną liczbę $A = [-1, 2, 4]$ oraz liczby $2A$ i $1/2A$.



Rys. 4.8. Skalowanie liczby rozmytej 2

Korzystając w własności dodawania i skalowania liczb trójkątnych można przedstawić wzór na wartość średnią k liczb. Oznaczmy przez $A^i = [a_1^i, a^i, a_p^i]$ i -tą z k liczb. Wartość średnią wyznacza się ze wzoru:

$$A^{sr} = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_1^i, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a^i, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_p^i \right] \quad (4.11)$$

Przykład 4.9.

Wyobraźmy sobie trzech ekspertów, których zadaniem jest prognozowanie czasu potrzebnego na wykonanie pewnego oprogramowania. Podają oni czas najbardziej optymistyczny, najbardziej prawdopodobny oraz najbardziej pesymistyczny. Prognozę każdego z nich można więc przedstawić przy użyciu liczb trójkątnych. Niech dla przykładu będą to liczby $[5, 8, 10]$, $[7, 9, 11]$ i $[6, 7, 9]$. Jako właściwą prognozę przyjmiemy wartość średnią, która wynosi $[6, 8, 10]$.

4.4. Porównywanie liczb rozmytych

W tradycyjnej arytmetyce są dwie możliwości: liczby albo są równe albo nie, natomiast w arytmetyce rozmytej są dopuszczalne wartości pośrednie. Najprostszym sposobem porównywania liczb rozmytych jest wyznaczanie odległości Minkowskiego:

$$d_q(A, B) = \left\{ \int_X |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^q dx \right\}^{1/q} \quad q > 1 \quad (4.12)$$

Po obliczeniu odległości wyznacza się wskaźnik równości według zależności:

$$E = 1 - d_q(A, B).$$

Określenie, która z dwu liczb rozmytych jest większa jest oczywiste tylko w przypadkach, kiedy ich nośniki są rozłączne. Jeśli jednak nośniki mają część

wspólną to może się zdarzyć, że liczba o mniejszym rdzeniu ma większy nośnik. Do porównywania liczb rozmytych tego typu stosuje się metodę odległości. Algorytm porównywania takich dwu liczb A i B jest następujący:

- 1) Wyznacza się trzecią liczbę $C = \max(A, B)$, większą od obu liczb A i B korzystając z zasady rozszerzania:

$$\mu_{\max(A,B)} = \sup_{(x,y) \max(x,y)=z} \left[\mu_A(x) * \mu_B(y) \right] \quad (4.13)$$

- 2) Następnie obliczana jest odległość Minkowskiego liczby C od liczby A i liczby B i przyjmuje się, że ta z nich jest większa, której odległość od liczby C jest mniejsza.

Inna metoda polega na porównywaniu α -przekrojów obu liczb. Przyjmuje się, że ta liczba jest większa, dla której górne granice są większe dla wszystkich $\alpha > \alpha'$.

4.5. Liczby LP

Algorytmy działań arytmetycznych na liczbach rozmytych charakteryzuje, jak wynika z poprzednich podrozdziałów, duża złożoność obliczeniowa. W celu uproszczenia tych operacji Dubois i Prade zaproponowali reprezentację liczb rozmytych przy pomocy trzech parametrów. Funkcja przynależności dla tych liczb ma postać:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{gdy } x \leq m \\ P\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{gdy } x > m \end{cases} \quad (4.14)$$

Występujący we wzorze parametr m jest rdzeniem liczby rozmytej, czyli $\mu_A(m) = 1$, α – rozrzutem lewostronnym (ang. left spreads), β – rozrzutem prawostronnym (ang. right spreads). Rozrzuty są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Liczby wyrażone wzorem 4.14 nazwane są LP (lewa-prawa) lub LR (left-right) i zapisywane symbolicznie jako $(m, \alpha, \beta)_{LR}$ lub $(m, \alpha, \beta)_{LP}$. L i P są funkcjami odwzorowującymi nazywanymi też bazowymi, spełniającymi następujące warunki:

- 1) $L(-x) = L(x)$; $P(-x) = P(x)$
- 2) $L(0) = 1$; $P(0) = 1$
- 3) L, P są funkcjami nierosnącymi w przedziale $(0, \infty)$.

Przy pomocy funkcji bazowych można również przedstawiać przedziały rozmyte LR (ang. fuzzy interwał LR). Funkcja przynależności do tych liczb wyraża się wzorem:

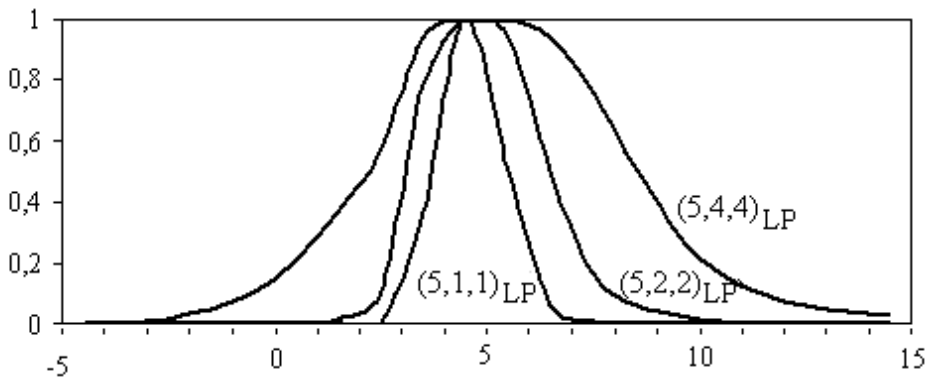
$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{n-x}{\alpha}\right) & \text{gdy } x \leq n \\ 1 & n \leq x \leq m \\ P\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{gdy } x > m \end{cases} \quad (4.15)$$

Przykład 4.10.

Przedstawmy na wykresie liczby LP o $m=5$ przy różnych parametrach $\alpha = 1, 2, 4$ oraz $\beta = 1, 2, 4$ i następujących funkcjach odwzorowujących:

$$L(x) = e^{-x^2} \quad P(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

Jak widać na rys. 4.9 zwiększenie parametrów α, β powoduje wzrost szerokości liczby rozmytej.



Rys. 4.9. Liczby rozmyte LP: $(5,1,1)_{LP}$, $(5,2,2)_{LP}$, oraz $(5,4,4)_{LP}$ o funkcjach bazowych z przykładu 4.10

4.6. Działania na liczbach LP

Działania arytmetyczne na liczbach LP sprowadzają się do obliczeń na trzech parametrach.

Liczbę przeciwną do liczby $A = (m_A, \alpha, \beta)$ wyznacza się według zależności:

$$-A = (-m_A, \beta, \alpha)_{LP} \quad (4.16)$$

Suma liczb $A = (m_A, \alpha_A, \beta_B)$ i $B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)$ równa jest:

$$A + B = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP} \quad (4.17)$$

Skalowanie liczb LR jest również wykonywane na trzech parametrach:

$$sA = (sm_A, s\alpha, s\beta)_{LP} \quad (4.18)$$

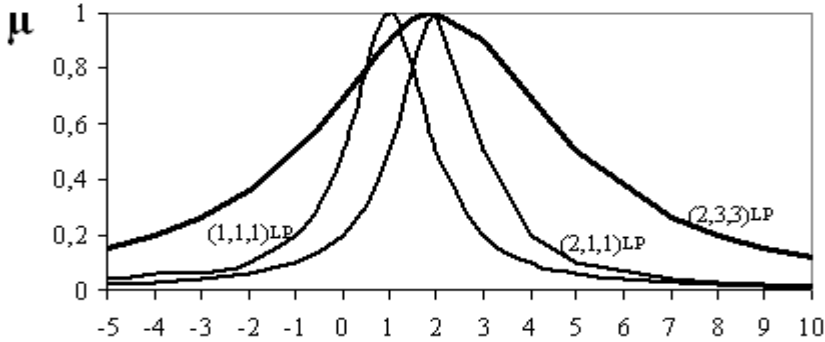
Do obliczeń typu mnożenie i dzielenie stosuje się wzory przybliżone. Jeśli rozrzuty są małe w stosunku do wartości średnich można zastosować następujące przybliżenie:

$$A \cdot B \approx (m_A m_B, m_B \alpha_A + m_A \alpha_B, m_B \beta_A + m_A \beta_B)_{LP}$$

$$A / B \approx \left(\frac{m_A}{m_B}, \frac{m_B \alpha_A + m_A \beta_B}{m_B^2}, \frac{m_B \beta_A + m_A \alpha_B}{m_B^2} \right) \quad (4.19)$$

Przykład 4.11.

Obliczmy przybliżony iloczyn liczb $A=(1,1,1)_{LP}$ i $B(2,1,1)_{LP}$ jeśli ich funkcje bazowe $L(x) = P(x) = 1/(1+x^2)$. Wynik mnożenia w przybliżeniu: $AB \approx (2, 3,3)_{LP}$ został przedstawiony na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Liczby rozmyte LP $(1,1,1)_{LP}$ i $(2,1,1)_{LP}$ i ich przybliżony iloczyn (linia pogrubiona) $(2,3,3)_{LP}$

ROZDZIAŁ 5

WNIOSKOWANIE ROZMYTE

5.1. Logika klasyczna.....	54
5.2. Reguły wnioskowania rozmytego.....	55
5.3. Zmienne lingwistyczne.....	57
5.4. Implikacja rozmyta.....	58
5.5. Baza reguł rozmytych.....	63
5.6. Wnioskowanie na podstawie rozmytej bazy reguł.....	64
5.7. Operatory agregacji.....	66

5.1. Logika klasyczna

Logika jako oddzielna dziedzina wiedzy została stworzona już w starożytności przez Arystotelesa (384-322 p. n.e.). Teoria Arystotelesa była rozwijana w szkole Stoików (IV i III w.p.n.e.). Podstawy logiki matematycznej przedstawił w swojej monografii wydanej w 1854 r. matematyk angielski G. Boole.

W logice klasycznej każdemu zdaniu przyporządkowana jest wartość logiczna 1, jeśli jest ono prawdziwe i 0 jeśli fałszywe. Elementarne zdania logiczne łączą się w formy zdaniowe przy zastosowaniu spójników logicznych: koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności, negacji. W tabeli 5.1 podane zostały wartości logiczne wynikające z łączenia zdań oraz stosowane symbole spójników. Elementarne zdania oznaczono przez a , b .

Tabela 5.1. Wartości logiczne najczęściej stosowanych form zdaniowych

a	1	1	0	0
b	1	0	1	0
koniunkcja $a \wedge b$	1	0	0	0
alternatywa $a \vee b$	1	1	1	0
implikacja $a \Rightarrow b$	1	0	1	1
równoważność $a \Leftrightarrow b$	1	0	0	1
negacja $\neg a$	0	0	1	1

Jak widać z powyższej tabeli, jeśli zdania połączone są spójnikiem „i” (koniunkcja), to w logice dwuwartościowej taka forma zdaniowa jest tylko wtedy prawdziwa, gdy oba zdania są prawdziwe. Połączenie spójnikiem „lub” (alternatywa) jest prawdą, jeśli którekolwiek ze zdań jest prawdziwe. Pod pojęciem implikacji rozumiemy stwierdzenie „jeśli a to b ”. Dla uproszczenia „ a ” nazywane jest „przesłanką” natomiast „ b ” – „konkluzją”. Implikacja bywa też nazywana regułą warunkową. Prawdziwa przesłanka implikuje tylko prawdziwą konkluzję, natomiast z fałszywej przesłanki może wynikać prawdziwa lub fałszywa konkluzja. Zdanie prawdziwe jest równoważne prawdziwemu a fałszywe fałszywemu. Negacją zdania prawdziwego jest zdanie fałszywe i odwrotnie. Istnieje pełna analogia pomiędzy prawami logiki a działaniami na zbiorach. Odpowiednikiem negacji jest dopełnienie zbioru, koniunkcji – iloczyn, alternatywy – suma, implikacji – inkluzja, równoważności – równość zbiorów. Zbiór pojęć z logiki i teorii zbiorów zamieszczono w tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Odpowiedniki pojęć w logice i teorii zbiorów

Logika	Teoria zbiorów
koniunkcja	iloczyn
alternatywa	suma
negacja	dopełnienie
implikacja	inkluzja
równoważność	równość

Implikacje są podstawowymi składnikami reguł wnioskowania. Najczęściej stosowanymi prawami wnioskowania są: modus ponens i modus tollens. Reguła modus ponens, którą można określić jak wnioskowanie do przodu, można zapisać za pomocą następującego schematu:

Przesłanka	x jest A
Implikacja	Jeżeli x jest A to y jest B
Wniosek	y jest B

Przykład 5.1.

Wnioskowanie modus ponens

Przesłanka	Prędkość samochodu wynosi 90 km/h
Implikacja	Jeżeli prędkość samochodu wynosi 90 km/h to zużycie paliwa wynosi 6l/100 km
Wniosek	Zużycie paliwa wynosi 6 l/100 km

Regułę modus tollens można zapisać następująco:

Przesłanka	Y jest B
Implikacja	Jeżeli x jest A to y jest B
Wniosek	x jest A

Przykład 5.2.

Wnioskowanie modus tollens

Przesłanka	Zużycie paliwa wynosi 6 l/100 km
Implikacja	Jeżeli prędkość samochodu wynosi 90 km/h to zużycie paliwa wynosi 6l/100 km
Wniosek	Prędkość samochodu wynosi 90 km/h

5.2. Reguły wnioskowania rozmytego

Logika dwuwartościowa nie uwzględnia wartości pośrednich; dane stwierdzenie jest prawdziwe lub fałszywe. Nie może, więc, reprezentować procesu myślenia człowieka, w którym stosowane są nieprecyzyjne stwierdzenia języka naturalnego. Wartości pośrednie między 0 i 1 wprowadził do logiki polski logik i filozof Jan Łukasiewicz w 1918 roku. Początkowo była to logika trójwartościowa, zakładająca istnienie dodatkowej wartości $\frac{1}{2}$ dla stwierdzeń nieprecyzyjnych. W 1930 r. Łukasiewicz wprowadził logiki nieskończenie wielowartościowe, w których wartości prawdy zawierały się w przedziale $[0,1]$. Nawiązując do wielowartościowej logiki Lofti Zadeh wprowadził pojęcie logiki rozmytej, w której stopień prawdy jest określony funkcją przynależności. Pozwoliło to na zastosowanie działań na zbiorach rozmytych, opisanych w rozdziale 2, takich jak s-normy, t-normy, negacje do wyznaczania stopnia prawdziwości zdań złożonych, zawierających alternatywę, koniunkcję czy

negację. Rozmyta reguła modus ponens może być przedstawiona za pomocą schematu podobnego do wnioskowania w logice dwuwartościowej:

Przesłanka	x jest A'
Implikacja	Jeżeli x jest A to y jest B
Wniosek	y jest B'

Występujące w powyższej regule zmienne x, y przyjmują wartości słów lub zdań z języka naturalnego i noszą nazwę zmiennych lingwistycznych, natomiast A, A', B, B' są zbiorami rozmytymi. Rozmyta implikacja „jeżeli – to” może być traktowana jako rozmyta relacja o funkcji przynależności $\mu_R(x,y)$. Występujące w przesłance i implikacji zbiory A i A' mogą być jednakowe lub sobie bliskie. Podobnie występujące w implikacji i wniosku zbiory B i B'. A' może być zbiorem „bardzo A”, „mniej więcej A”, lub „nie A”. Zbiór „bardzo A” jest wynikiem operacji koncentracji, tak więc funkcja przynależności $\mu_{A'}(x) = [\mu_A(x)]^2$. Zbiór „mniej więcej A” uzyskamy poprzez rozrzedzenie zbioru A, przy którym $\mu_{A'}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$, zbiór „nie A” jest dopełnieniem do zbioru A, tak więc, $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Przykład 5.3.

Rozważmy schemat wnioskowania przedstawiony poniżej, w którym przesłanka, implikacja i wniosek są nieprecyzyjnymi stwierdzeniami.

Przesłanka	Prędkość samochodu jest duża
Implikacja	Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to zużycie paliwa jest duże
Wniosek	Zużycie paliwa jest średnio duże

Występują tu następujące zmienne lingwistyczne: x – prędkość samochodu, y – zużycie paliwa. Zmienna x może przyjmować wartości ze zbioru: {mała, średnia, duża, bardzo duża}, y – ze zbioru: {małe, średnie, średnio duże, duże}. Do każdego elementu tych zbiorów można przyporządkować odpowiedni zbiór rozmyty. W przedstawionym schemacie są to następujące zbiory: A – bardzo duża prędkość samochodu, A' – duża prędkość samochodu, B- duże zużycie paliwa, B' – średnio duże zużycie paliwa. Zbiór rozmyty „średnio duże” uzyskamy stosując operacje rozcieńczenia zbioru „duże”.

W schemacie modus tollens również występują zmienne lingwistyczne i przyporządkowane im zbiory rozmyte.

Przesłanka	y jest B'
Implikacja	Jeżeli x jest A to y jest B
Wniosek	x jest A'

Oba schematy wnioskowania są proste i intuicyjne, nie jest jednak oczywisty

sposób, w jaki należy przetłumaczyć je na struktury algorytmów komputerowych. W dalszej części opracowania ograniczymy się do wyznaczania wartości logicznej implikacji. Złożenie implikacji z wartością logiczną rozmytej przesłanki będzie następnym krokiem wnioskowania rozmytego.

Przykład 5.4.

Schemat wnioskowania rozmytego modus tollens dla tych samych zmiennych co w przykładzie 5.3 przedstawia poniższy schemat.

Przesłanka	Zużycie paliwa jest średnio duże
Implikacja	Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to zużycie paliwa jest duże
Wniosek	Prędkość samochodu jest duża

Wniosek reguły rozmytej dotyczy zbioru rozmytego B' , który jest określany przez złożenie zbioru rozmytego A' i rozmytej implikacji $\mu_{A \Rightarrow B}(x, y)$. Funkcja przynależności do B' jest wyznaczana z następującej zależności:

$$\mu_{B'}(y) = \sup \left[\mu_{A'}(x) * \mu_{A \Rightarrow B}(x, y) \right] \quad (5.1)$$

5.3. Zmienne lingwistyczne

W poprzednim podrozdziale wspomniano, że wielkości występujące w regułach wnioskowania przybliżonego noszą nazwę zmiennych lingwistycznych. Dla przykładu jeśli mówimy, że *temperatura jest niska* to pojęcie temperatura ma zupełnie inne znaczenie niż w przypadku, gdy określamy ją na podstawie odczytu z termometru. W tym przypadku z pojęciem *temperatura* kojarzymy pewną zmienną lingwistyczną, która dla przykładu przyjmuje wartości *niska*, *średnia*, *duża*. Wartościom tym możemy przyporządkować zbiory rozmyte określone na ostrym uniwersum w stopniach Celsjusza.

Ogólnie zmienną lingwistyczną definiuje się jako piątkę:

$$L = (N, E(G), X, G, M) \quad (5.2)$$

N oznacza nazwę zmiennej lingwistycznej, $E(G)$ - zbiór etykiet przyporządkowanych do zbiorów rozmytych określonych na przestrzeni X . Etykiety te są wartościami zmiennej lingwistycznej. G reprezentuje zbiór reguł syntaktycznych, które pozwalają na utworzenie stwierdzeń zawierających wartości zmiennej lingwistycznej, natomiast M oznacza semantykę zmiennej L realizującą odwzorowanie przyporządkowujące każdej etykiecie zbiór rozmyty określony w przestrzeni X .

Do wartości zmiennych lingwistycznych mogą być stosowane modyfikatory opisane w podrozdziale 1.4. Poprzez zastosowanie funkcji potęgowej z wykładnikiem większym od 1 uzyskujemy koncentrację, mniejszym od 1 rozmywanie. Możliwe jest także tworzenie złożonych wartości lingwistycznych z zastosowaniem łączników „I”, „LUB”.

Przykład 5.5.

Zmienna lingwistyczna *wzrost człowieka* może mieć następujące wartości {*niski, średni, wysoki*}. Do każdej z tych zmiennych należy przyporządkować określone zbiory rozmyte. Możemy również je modyfikować tworząc dla przykładu wartości :

- a) *nie wysoki* poprzez dopełnienie do zbioru rozmytego *wysoki*;
- b) *bardzo niski* jako kwadrat funkcji przynależności do zbioru *niski*;
- c) *mniej więcej średni* jako pierwiastek z funkcji przynależności do zbioru *średni*;
- d) w *przybliżeniu średni* z funkcja przynależności $\mu_{A'}(x) = \min[1, \alpha\mu_A(x)]$ przy $\alpha > 1$;
- e) *nie niski i nie wysoki* jako t-norma z dopełnień do zbiorów rozmytych *niski* i *wysoki*;
- f) *średni lub wysoki* jako s-norma zbiorów rozmytych *średni* oraz *wysoki*.

5.4. Implikacja rozmyta

Zauważmy, że w implikacji występują dwa zbiory rozmyte A i B. Wartość logiczną tej formy zdaniowej charakteryzuje pewien stopień przynależności

z przedziału [0,1] do zbioru *prawda*: $\mu_{A \Rightarrow B}(x, y)$. Określenie sposobu wyznaczania funkcji przynależności do rozmytej implikacji było przedmiotem zainteresowań wielu badaczy. W dalszej części opracowania zostaną przedstawione niektóre z nich. Najczęściej stosowana jest implikacja Mamdaniego, dla której funkcję przynależności określa wzór:

$$\mu_{\text{Mamdaniego}}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad (5.3)$$

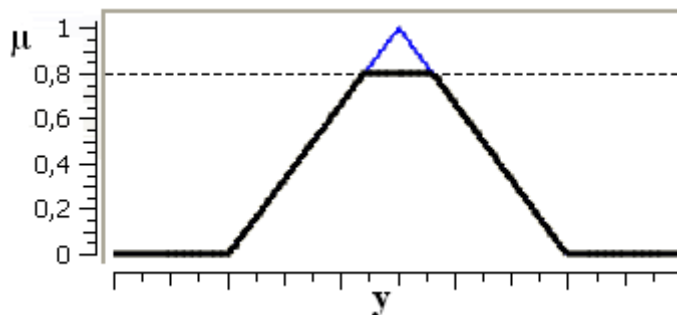
Może być ona interpretowana, jako działanie t-normy Zadeha na zbiory rozmyte. Do tej samej grupy można zaliczyć implikację Larsena, w której zastosowana jest t-norma typu iloczyn.

$$\mu_{\text{Larsena}}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \quad (5.4)$$

Wyrażenia Mamdaniego i Larsena nie są implikacjami w sensie logicznym, jednak w literaturze są często tak nazywane. Reguła Mamdaniego bywa też nazywana „implikacją inżynierską”.

Przykład 5.6.

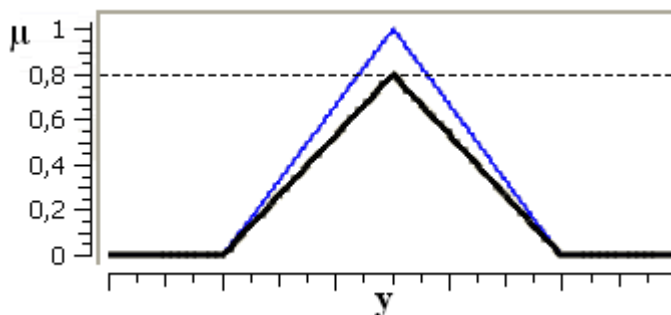
Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$, stopień prawdy przesłanki wynosi 0,8 ($\mu_A(x) = 0,8$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Funkcja przynależności do zbioru B (konkluzja) zgodnie z regułą Mamdaniego jest przedstawiona linią pogrubioną na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Mamdaniego, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,8

Przykład 5.7.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$ z zastosowaniem implikacji Larsena, stopień prawdy przesłanki jest równy 0,8 ($\mu_A(x) = 0,8$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Funkcja przynależności konkluzji jest przedstawiona linią pogrubioną na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Larsena, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,8

Implikacje logiczne zgodnie z teorią J. Fodora powinny spełniać następujące warunki:

- 1) Implikacja powinna być nierosnącą funkcją pierwszego argumentu, więc, jeśli $\mu_A(x) \leq \mu_A(z)$ to $\mu_{A \Rightarrow B}(x, y) \geq \mu_{A \Rightarrow B}(z, y)$
- 2) Implikacja powinna być niemalejącą funkcją drugiego argumentu, co oznacza, że jeśli $\mu_B(y) \leq \mu_B(z)$ to $\mu_{A \Rightarrow B}(x, y) \leq \mu_{A \Rightarrow B}(x, z)$
- 3) Stopień prawdy implikacji dla funkcji przynależności do zbioru A równej 0 może być równy 1 $\mu_{A \Rightarrow B}(0, y) = 1$, gdyż z fałszu może wynikać prawda lub fałsz.
- 4) Stopień prawdy implikacji dla funkcji przynależności do zbioru B (następnika) równej 1 powinien być równy 1 (cokolwiek może prowadzić do prawdy).
- 5) Stopień prawdy implikacji dla funkcji przynależności do zbioru A równej 1, a zbioru B równej 0, powinien być równy 0 ($\mu_{A \Rightarrow B}(x, y) = 0$), gdyż

z prawdy nie może wynikać fałsz.

Wśród implikacji logicznych są wyróżniane grupy: S-implikacji, R-implikacji, Q-implikacji.

Implikacja binarna (Kleene'a-Dienes) należy do grupy tzw. S-implikacji. Grupa ta charakteryzuje się funkcją przynależności będącą wynikiem działania s-normy na dopełnienie do zbioru A i zbiór B:

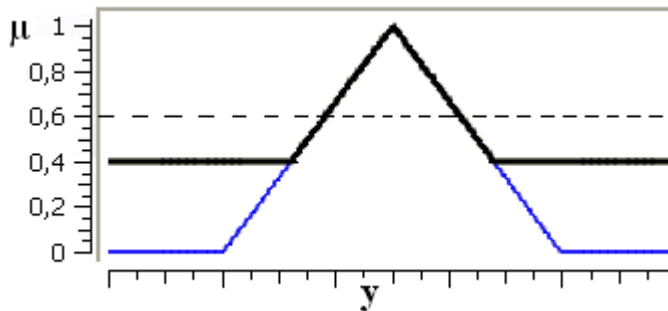
$$\mu_S(x, y) = [1 - \mu_A(x)] * \mu_B(y) \quad (5.5)$$

W implikacji Kleene'a-Dienes jako s-norma została zastosowana suma mnogościowa, czyli operacja maksimum:

$$\mu_{\text{Kleene'a-Dienes}}(x, y) = \max \{ [1 - \mu_A(x)], \mu_B(y) \} \quad (5.6)$$

Przykład 5.8.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$ z zastosowaniem implikacji Kleene'a-Dienes, stopień prawdy przesłanki jest równy 0,6 ($\mu_A(x) = 0,6$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Funkcja przynależności konkluzji jest przedstawiona linią pogrubioną na rys. 5.3.



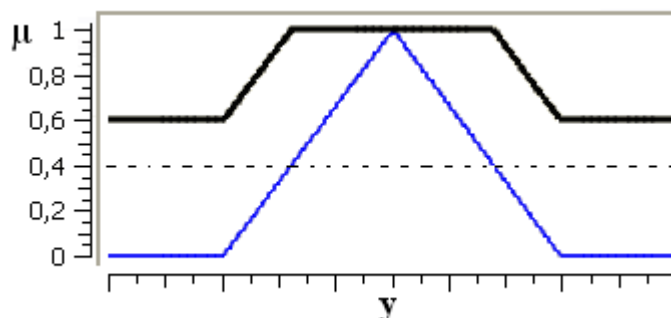
Rys. 5.3. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Kleene'a-Dienes, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,6

Do tej samej grupy należy implikacja Łukaszewicza:

$$\mu_{\text{Łukaszewicza}}(x, y) = \min [1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] \quad (5.7)$$

Przykład 5.9.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$, stopień prawdy przesłanki - 0,4 ($\mu_A(x) = 0,4$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Funkcja przynależności wniosku według reguły Łukaszewicza (konkluzja) jest przedstawiona linią pogrubioną na rys. 5.4.



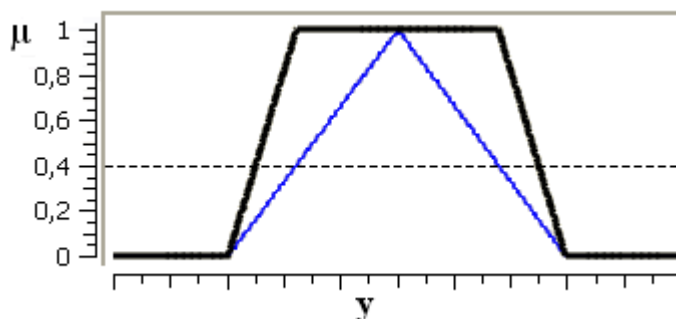
Rys. 5.4. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Łukaszewicza, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,4

Do grupy R-implikacji należy implikacja Goguena, której funkcja przynależności wyraża się wzorem:

$$\mu_{\text{Goguena}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) = 0 \\ \min[1, \mu_B(x) / \mu_A(x)] & \text{dla } \mu_A(x) > 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Przykład 5.10.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$, stopień prawdy przesłanki - 0,4 ($\mu_A(x) = 0,4$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Wynik wnioskowania według reguły Goguena jest przedstawiony linią pogrubioną na rys. 5.5.



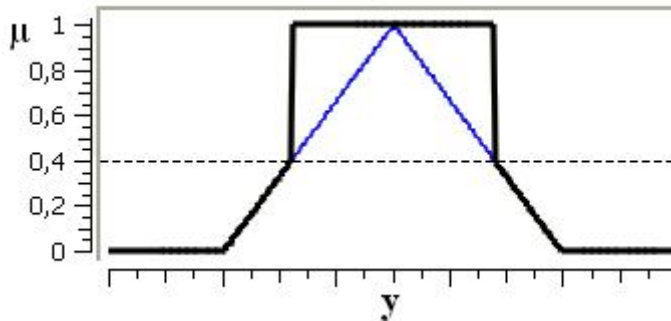
Rys. 5.5. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Goguena, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,4

Do tej samej grupy należy też implikacja Gödela, która można przedstawić wzorem:

$$\mu_{\text{Gödel}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \text{gdy } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} \quad (5.9)$$

Przykład 5.11.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$, stopień prawdy przesłanki - 0,4 ($\mu_A(x) = 0,4$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Wynik wnioskowania według reguły Gödela jest przedstawiony linią pogrubioną na rys. 5.6.



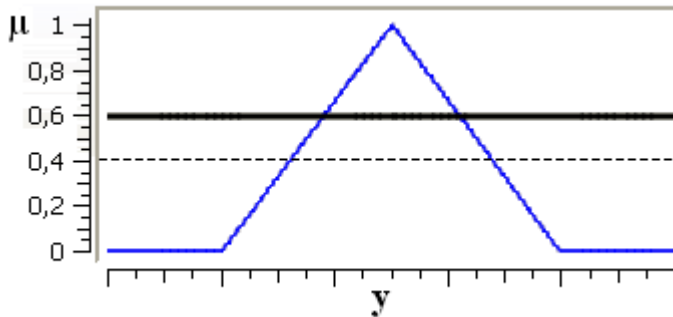
Rys. 5.6. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Gödela, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,4

Następną wyróżnioną grupą są Q-implikacje, których przedstawicielką jest implikacja Zadeha:

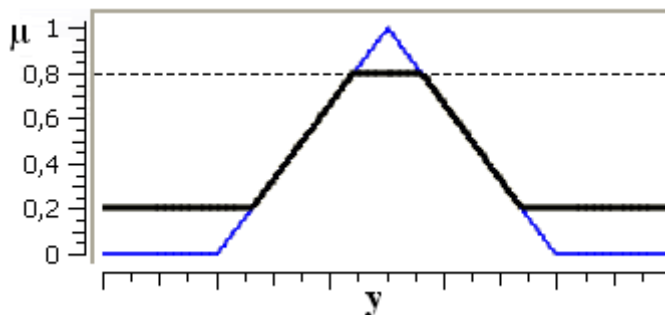
$$\mu_{\text{Zadeha}}(x, y) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)], [1 - \mu_A(x)]\} \quad (5.10)$$

Przykład 5.12.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$. Porównajmy wyniki wnioskowania przy dwóch stopniach prawdy przesłanki: 0,4 oraz 0,8, jeśli funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Wyniki wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Zadeha są przedstawione liniami pogrubionymi na rys. 5.7 i 5.8. Łatwo sprawdzić, że dla $\mu_A(x) \leq 0,5$ funkcja ta przyjmuje wartość $1 - \mu_A(x)$, co widać na rys. 5.7. Dla porównania na rys. 5.8 przedstawiono wynik wnioskowania Zadeha dla $\mu_A(x) = 0,8$.



Rys. 5.7. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Zadeha, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,4



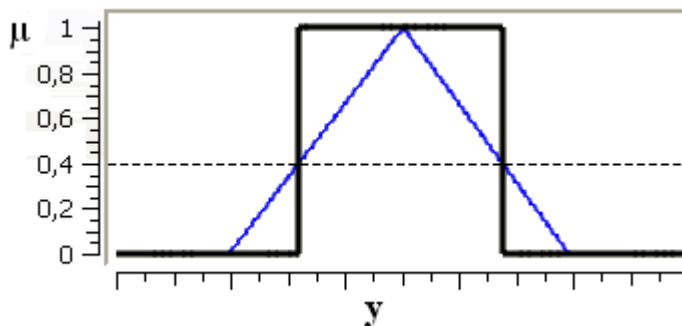
Rys. 5.8. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Zadeha, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,8

Implikacja Reschera (standardowa) sprowadza funkcję przynależności do postaci charakterystycznej dla zbioru ostrego.

$$\mu_{\text{Reschera}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0 & \text{w p p} \end{cases} \quad (5.11)$$

Przykład 5.13.

Przyjmijmy, że w schemacie wnioskowania modus ponens $A = A'$ i $B = B'$, stopień prawdy przesłanki - 0,4 ($\mu_A(x) = 0,4$), a funkcja przynależności do zbioru B jest opisana funkcją Λ . Wynik wnioskowania z zastosowaniem implikacji Reschera jest przedstawiony linią pogrubioną na rys. 5.9.



Rys. 5.9. Wynik wnioskowania przy zastosowaniu implikacji Reschera, jeśli stopień prawdy przesłanki jest równy 0,4

Czytelnik na podstawie literatury, której wykaz jest dołączony na końcu opracowania może zapoznać się ze wzorcami implikacji innych autorów.

5. 5. Baza reguł rozmytych

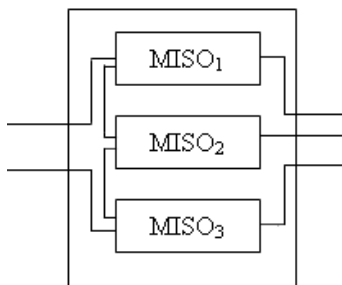
Bazę reguł stanowi zbiór reguł rozmytych postaci jeżeli-to. Oznaczmy przez $R^{(k)}$ k-tą regułę ($k=1, 2, \dots, K$), x_n – n-tą wielkość wejściową ($n=1, 2, \dots, N$), A_n^k – zbiory rozmyte wejściowe ($n=1, 2, \dots, N$), y_m m-tą wielkość wyjściową ($m=1, 2, \dots, M$) oraz B_m^k – m-ty rozmyty zbiór wyjściowy. Wybraną k-tą regułę rozmytą

można zapisać w postaci:

$$R^{(k)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k, \text{ I } \dots \text{ I } x_N \text{ jest } A_N^k \\ \text{TO } y_1 \text{ jest } B_1^k \text{ I } y_2 \text{ jest } B_2^k \text{ I } \dots \text{ I } y_m \text{ jest } B_m^k, \text{ I } \dots \text{ I } y_M \text{ jest } B_M^k \quad (5.12)$$

Każda reguła składa się tzw. poprzednika – JEŻELI (ang. antecedent), czyli zbioru warunków oraz tzw. następnika – TO (ang. consequent), czyli wniosków. Przedstawione formułą 5.12 reguły określają bazę systemu o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang. Multi-Input-Multi-Output – MIMO).

Przy założeniach, że poszczególne reguły są powiązane ze sobą za pomocą operatora logicznego „LUB” oraz, że wyjścia są wzajemnie niezależne, sterownik o wielu wejściach i wielu wyjściach (MIMO) może być zastąpiony wieloma sterownikami o jednym wyjściu (ang. Multi-Input-Single-Output, MISO). Dekompozycję sterownika o trzech wyjściach na sterowniki o jednym wyjściu przedstawiono na rys. 5.10.



Rys. 5.10. Rozkład sterownika MIMO o trzech wyjściach na trzy sterowniki MISO

Wynikiem k-tej reguły w systemie MISO jest jeden zbiór rozmyty B^k . Reguła 5.12 przyjmuje więc postać:

$$R^{(k)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k, \text{ I } \dots \text{ I } x_N \text{ jest } A_N^k \\ \text{TO } y \text{ jest } B^k \quad (5.13)$$

Przy oznaczeniu $A^k = A_1^k \times A_2^k \times \dots \times A_N^k$ regułę $R^{(k)}$ można traktować jako rozmytą implikację:

$$R^{(k)}: A^k \Rightarrow B^k \quad (5.14)$$

5. 6. Wnioskowanie na podstawie rozmytej bazy reguł

Wnioskowane na podstawie bazy reguł rozmytych można podzielić na dwie główne grupy:

1. Agregacja a następnie wnioskowanie (ang. First Aggregate Then Infer - FATI), czyli wnioskowanie oparte na złożeniu (ang. composition based inference). W tej metodzie na wyjściu otrzymujemy jeden zbiór rozmyty. Uogólnioną regułę wnioskowania *modus ponens* dla tej metody przedstawia poniższy schemat:

Przesłanka	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ jest \mathbf{A}' $\mathbf{A}' = A_1' \times A_2' \times \dots \times A_N'$
Implikacja	$\bigcup_{k=1}^K R^{(k)}, R^{(k)} : \mathbf{A}^k \Rightarrow \mathbf{B}^k$ $\mathbf{A}^k = A_1^k \times A_2^k \times \dots \times A_N^k$
Wniosek	y jest \mathbf{B}'

Zastosowanie złożeniowej metody wnioskowania prowadzi do następującego wzoru określającego funkcję przynależności do zbioru \mathbf{B}' :

$$\mu_{\mathbf{B}'}(y) = \sup_{x \in X} \left[\mu_{\mathbf{A}'}(\mathbf{x})^T * \max_{1 \leq k \leq K} \mu_{R^k}(\mathbf{x}, y) \right] \quad (5.15)$$

2. Wnioskowanie a następnie agregacja (ang. First Infer Then Aggregate –FITA) lub inaczej wnioskowanie oparte na pojedynczych regułach (ang. individual rule inference). Uogólniona reguła *modus ponens* dla tej metody jest przedstawiona poniżej:

Przesłanka	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ jest \mathbf{A}' $\mathbf{A}' = A_1' \times A_2' \times \dots \times A_N'$
Implikacja	$R^{(k)} : \mathbf{A}^k \Rightarrow \mathbf{B}^k \quad k=1,2,\dots,K$ $\mathbf{A}^k = A_1^k \times A_2^k \times \dots \times A_N^k$
Wniosek	y jest \mathbf{B}^k

Zbiory rozmyte \mathbf{B}^k powstają przez złożenie zbioru rozmytego \mathbf{A}' i relacji $R^{(k)}$. Funkcje przynależności do tych zbiorów wyznacza się według wzoru:

$$\mu_{\mathbf{B}^k}(y) = \sup_{x \in X} \left[\mu_{\mathbf{A}'}(\mathbf{x})^T * \mu_{R^k}(\mathbf{x}, y) \right] \quad (5.16)$$

Jeśli operacja rozmywania jest typu singleton, wzór 5.16 przyjmuje postać:

$$\mu_{\mathbf{B}^k}(y) = \mu_{R^k}(\bar{\mathbf{x}}, y) \quad (5.17)$$

Funkcja przynależności wyrażona tym wzorem zależy od rozmytej implikacji oraz sposobu zdefiniowania iloczynu kartezjańskiego zbiorów rozmytych.

5. 7. Operatory agregacji

Wnioskowanie oparte jest o wiele reguł rozmytych jeżeli-to. Ostateczne wnioski mogą być uzyskane po odpowiedniej agregacji pojedynczych reguł. Dlatego też poprawne wnioskowanie zależy również od doboru operatorów agregacji. Generalnie powinny one spełniać następujące warunki:

- 1) Reagować nieskończenie małą zmianą wartości wyjściowej na nieskończenie małą zmianę wartości wejściowych.
- 2) Nie zależeć od dowolnej permutacji wartości wejściowych.
- 3) Zachować idempotentność, co oznacza, że w wyniku agregacji takich samych danych wejściowych otrzymujemy na wyjściu wartość jednej z nich.
- 4) Zachować łączność.

Są dwa niezależne podejścia do problemu agregacji. W pierwszym poszczególne reguły rozmyte traktuje się jako niezależne. Uzasadnione jest przy takim założeniu używanie s-norm jako operacji agregujących. Takie podejście jest nazywane kombinacją Mamdaniego. Wynikową funkcję przynależności przy zastosowaniu operatora s-normy można zapisać wzorem:

$$\mu_B(y) = S[\mu_{B^1}(y), \mu_{B^2}(y), \dots, \mu_{B^K}(y)] \quad (5.18)$$

Jeśli zastosujemy s-normę standardową, wzór 5.18 przyjmie postać:

$$\mu_B(y) = \max[\mu_{B^1}(y), \mu_{B^2}(y), \dots, \mu_{B^K}(y)] \quad (5.19)$$

W innym podejściu, zwanym kombinacją Gödela, reguły traktowane są, jako powiązane stwierdzenia warunkowe, uzasadnione jest więc zastosowanie t-norm. Kompromisowe rozwiązanie problemu agregacji godzące te dwa przeciwstawne podejścia jest możliwe przy zastosowaniu działań kompensacyjnych opisanych w podrozdziale 2.4 lub zastosowanie średnich jako operatorów agregacji. Operator kompensacyjny Zimmermana opisany wzorem 2.19 można uogólnić na K zbiorów. Otrzymamy wtedy:

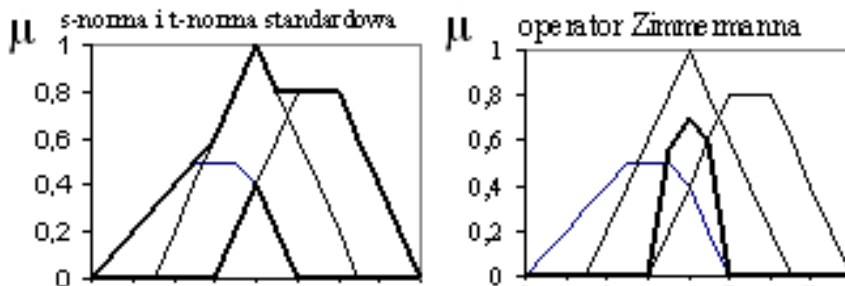
$$\mu_B(y) = \prod_{k=1}^K [\mu_{B^k}(y)]^{1-\gamma} \prod_{k=1}^K [1 - \mu_{B^k}(y)]^{\gamma} \quad (5.20)$$

Uogólniony operator średniej zależny od parametru β , który może przyjmować wartości z zakresu liczb rzeczywistych z wyjątkiem 0, możemy przedstawić wzorem:

$$\mu_{srO}(y) = \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\mu_{B^k}(y)]^{\beta} \right]^{1/\beta} \quad (5.21)$$

Przykład 5.14.

Porównajmy wyniki działania operatorów standardowych t-normy i s-normy i operatora Zimmermana dla $\gamma=0,8$ na trzy zbiory rozmyte (liniami cienkimi przedstawiono funkcje przynależności do tych zbiorów).



Rys. 5.11. Porównanie działania s-normy i t-normy standardowej i operatora Zimmermanna przy $\gamma=0,8$ (linie pogrubione)

Jeśli $\beta=-\infty$ otrzymujemy koniunkcję, dla $\beta=-1$ przy założeniu, że $\mu_{B^k}(y) \neq 0$ średnią harmoniczną:

$$\mu_{srH}(y) = \frac{1}{K} \left[\sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_{B^k}(y)} \right]^{-1} \quad (5.22)$$

Jeśli $\beta=1$, wzór 5.21 opisuje średnią arytmetyczną (A) (wzór 5.23), natomiast przy $\beta=2$, średnią kwadratową (Q) (wzór 5.24):

$$\mu_{srA}(y) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mu_{B^k}(y) \quad (5.23)$$

$$\mu_{srQ}(y) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\mu_{B^k}(y)]^2} \quad (5.24)$$

Stosowane są również operatory średniej ważonej. Uogólniony operator średniej ważonej możemy przedstawić wzorem 5.25, w którym występują parametry wag w_k .

$$\mu_{srO_w}(y) = \left[\sum_{k=1}^K w_k [\mu_{B^k}(y)]^\beta \right]^{1/\beta} \quad (5.25)$$

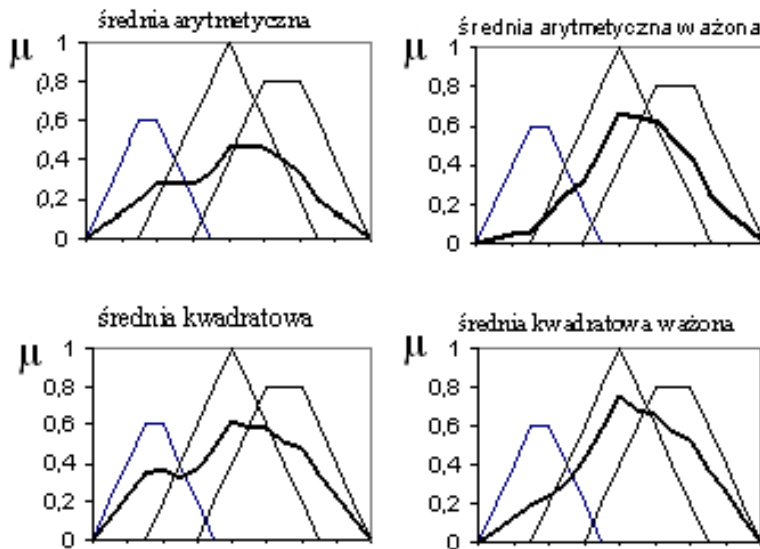
Suma współczynników wagowych w_k powinna być równa 1:

$$\sum_{k=1}^K w_k = 1 \quad (5.26)$$

Przykład 5.15.

Na rys. 5.12 przedstawiono wyniki agregacji trzech zbiorów rozmytych (linie cienkie) operatorami: średniej arytmetycznej, średniej kwadratowej oraz ważonymi operatorami średniej arytmetycznej i średniej kwadratowej z wagami

$w_1 = 0,1$; $w_2 = 0,5$ oraz $w_3 = 0,4$. Dla porównania przedstawiono też wyniki agregacji przy zastosowaniu standardowej s-normy i t-normy



Rys. 5.12. Porównanie średnich: arytmetycznej i kwadratowej oraz ważonych średnich: arytmetycznej i kwadratowej (przy współczynnikach wagowych 0,1; 0,5; 0,4)

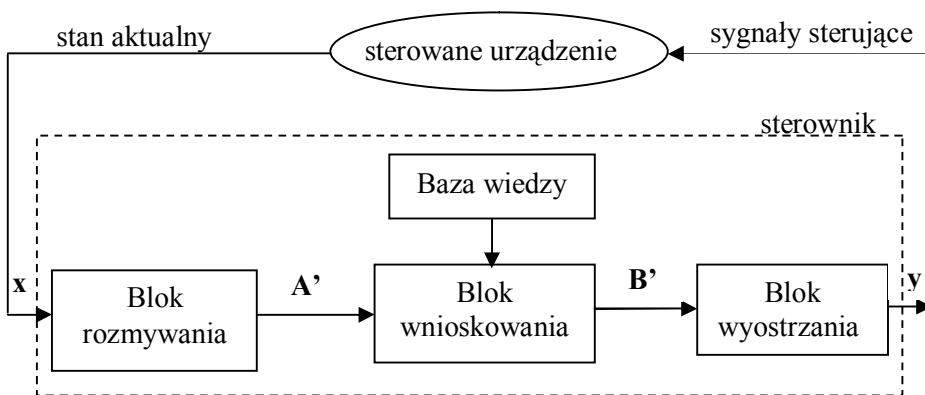
ROZDZIAŁ 6

STEROWNIKI ROZMYTE

6.1. Ogólny schemat sterownika rozmytego.....	70
6.2. Tworzenie bazy wiedzy.....	70
6.3. Blok rozmywania.....	74
6.4. Blok wnioskowania.....	74
6.5. Blok wyostżania.....	76
6.6. Sterownik Mamdaniego-Assilana.....	77
6.7. System rozmyty Takagi-Sugeno-Kanga.....	80
6.8. System rozmyty Łęskiego-Czogały.....	82

6. 1. Ogólny schemat sterownika rozmytego

Sterowanie urządzeniami czy procesami jest działaniem, które na podstawie obserwacji wielkości wyjściowych zmienia wielkości wejściowe tak, by osiągnąć pożądaną stan układu. Konwencjonalne układy automatycznego sterowania oparte są o matematyczne modele i wymagają ścisłego analitycznego opisu. Zastosowanie reguł logiki rozmytej w procesie sterowania eliminuje konieczność znajomości modeli procesów. Sterowanie rozmyte naśladuje ludzkie umiejętności i wymaga jedynie odpowiedniego sformułowania reguł JEŻELI..TO. Typowy sterownik rozmyty (ang. fuzzy logic controller) składa się z następujących części: a) bazy wiedzy (reguł), b) bloku rozmywania, c) bloku wnioskowania d) bloku wyostrzania (rys.6.1).



Rys. 6.1. Ogólny schemat sterowania rozmytego

Na wejście sterownika są podawane wielkości ostre z odpowiednich dla danego układu czujników. Liczba wejść, a tym samym liczba sygnałów wejściowych, jest zależna od złożoności układu sterowania. Ponieważ w dalszych blokach działania odbywają się na zbiorach rozmytych, wielkości te są rozmywane (blok rozmywania). Następnie w oparciu o bazę wiedzy odbywa się proces wnioskowania w wyniku którego powstaje jeden lub więcej zbiorów rozmytych. Zbiory te poddaje się procesowi agregacji. Następnie wynikowy zbiór (lub zbiory) rozmyty jest wyostrzany i w rezultacie na wyjściu uzyskiwane są sygnały ostre sterujące stanem sterownika.

6.2. Tworzenie bazy wiedzy

Bazę wiedzy stanowi zbiór reguł rozmytych postaci JEŻELI.....TO opisanych w rozdziale 5. 5. Przy konstruowaniu bazy reguł należy zwrócić uwagę, by były one niesprzeczne, wzajemnie niezależne oraz by ich liczba była wystarczająca. Innymi słowy baza powinna być zgodna, ciągła i kompletna. Warunek zgodności (niesprzeczności) oznacza, że nie zawiera ona reguł, które dla jednakowych przesłanek mają różne konkluzje. Baza jest kompletna, jeśli dla

każdej wartości wejściowej przynajmniej jedna reguła jest aktywna. Utworzenie poprawnej bazy reguł rozpoczyna się od utworzenia zbiorów rozmytych wejściowych

i wyjściowych. W tym celu zakresy zmiennych dzielimy na przedziały i każdemu z nich przypisujemy określoną wartość zmiennej lingwistycznej np.: *mała, średnia, duża, bardzo duża*.

W konstrukcji funkcji przynależności często korzysta się z opinii ekspertów. Ich zadaniem jest określenie stopni przynależności elementów ze zbiorów uczących do odpowiednich zbiorów rozmytych. Możemy tu wyróżnić dwa podejścia: bezpośrednie i pośrednie. W metodach bezpośrednich zadaniem eksperta (lub ekspertów) jest odpowiedź na pytanie: „Jaki jest stopień przynależności elementu x do zbioru A ?” Jeśli korzystamy z opinii wielu (L) ekspertów każdy (l -ty) ekspert odpowiada na powyższe pytanie i podaje funkcję przynależności, a następnie wylicza się średnią :

$$\mu_A(x) = \frac{\sum_{l=1}^L \mu_A^l(x)}{L} \quad (6.1)$$

Jest to probabilistyczna interpretacja konstrukcji funkcji przynależności. Jeśli uwzględnione zostaną kompetencje l -tego eksperta (c^l), funkcje przynależności określa się według wzoru:

$$\mu_A(x) = \sum_{l=1}^L c^l \mu_A^l \quad \sum_{l=1}^L c^l = 1 \quad (6.2)$$

W metodzie pośredniej z jednym ekspertem wybieramy kolejno pary elementów x_i, x_j . Zadaniem eksperta jest podanie wag porównań $p_{i,j}$. Przy założeniu, że porównanie jest poprawne:

$$p_{i,j} = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_A(x_j)} \quad (6.3)$$

Następnie wśród wartości $p_{i,j}$ i $p_{j,i}$ znajdujemy element o największej wadze. Oznaczmy indeks tego elementu przez t . Elementowi x_t przypisujemy funkcję przynależności do zbioru rozmytego A równą 1.

$$p_{t,j} = \frac{\mu_A(x_t)}{\mu_A(x_j)} = \frac{1}{\mu_A(x_j)} \rightarrow \mu_A(x_j) = \frac{1}{p_{t,j}} \quad (6.4)$$

Po określeniu stopni przynależności dla poszczególnych elementów konstruowana jest funkcja metodą interpolacji Lagrange'a, najmniejszych kwadratów lub z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych. Eksperci formułują także reguły rozmyte.

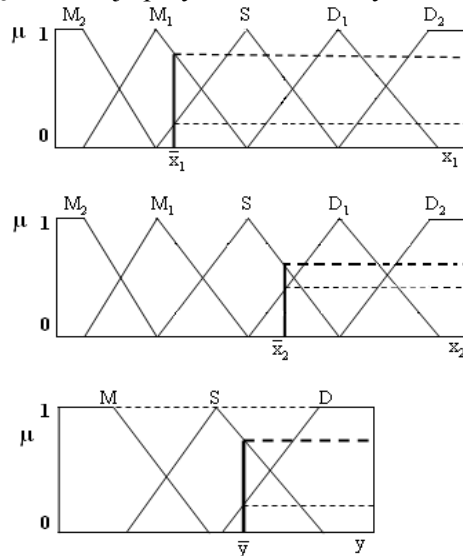
Jeśli nie jest możliwe pozyskanie wiedzy od ekspertów stosowane jest tworzenie bazy wiedzy na podstawie danych numerycznych wejściowych i wyjściowych. Prostą metodę tworzenia bazy wiedzy opracowali L. X. Wang i J. M. Mendel z zastosowaniem algorytmu składającego się z następujących kroków:

1) Określenie wartości minimalnych i maksymalnych danych wejściowych

- (oznaczymy je x_{\min} i x_{\max}) i wyjściowych (y_{\min} , y_{\max});
- 2) Podział zakresu danych wejściowych na N , a danych wyjściowych na L przedziałów równej lub różnej długości;
 - 3) Przypisanie każdemu z nich trójkątnej ($\Lambda_{d,c,g}$) funkcji przynależności, która przyjmuje wartość 1 w środku przedziału (c) i 0 w środkach sąsiednich przedziałów;
 - 4) Wyznaczenie funkcji przynależności dla każdego zestawu danych uczących do zaprojektowanych zbiorów rozmytych i znalezienie zbiorów o największych wartościach funkcji przynależności;
 - 5) Sformułowanie reguły JEŻELI-TO w oparciu o wyznaczone wartości maksymalne;
 - 6) Przyporządkowanie stopnia prawdziwości do każdej reguły będącego iloczynem funkcji przynależności danych uczących do zbiorów rozmytych zawartych w regule. Zwykle jest dużo zestawów uczących, a każdy z nich stanowi podstawę do sformułowania reguły, jest więc prawdopodobne, że niektóre okażą się sprzeczne;
 - 7) Utworzenie bazy reguł rozmytych. Jeśli otrzymamy więcej reguł rozmytych o tych samych przesłankach to wybieramy tę, która ma największy stopień prawdziwości.

Przykład 6.1.

Przeanalizujmy zasadę tworzenia reguł rozmytych sterownika z dwoma wejściami (x_1 , x_2) i jednym wyjściem. Zakresy danych wejściowych x_1 i x_2 podzielmy na 5 części i utwórzmy funkcje przynależności do zbiorów rozmytych *bardzo małe* (M_2), *małe* (M_1), *średnie* (S), *duże* (D_1), *bardzo duże* (D_2). Na rys. 6.2 przedstawiono trójkątne funkcje przynależności do tych zbiorów.



Rys. 6.2. Zasada tworzenia reguł rozmytych sterownika z dwoma wejściami x_1 i x_2 oraz jednym wyjściem – y

Dane wyjściowe przyporządkujemy do trzech zbiorów rozmytych *małe* (M), *średnie* (S), *duże* (D). Ogólną postać reguły rozmytej można zapisać w postaci:

R: Jeżeli (x_1 jest A_1 I x_2 jest A_2) TO y jest B

Każdej regule przyporządkujemy stopień prawdziwości $SP(R)$:

$$SP(R) = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2) \cdot \mu_B(y) \quad (6.5)$$

Utwórzmy regułę biorąc jeden komplet danych $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}$. Wybieramy dla każdej z tych zmiennych zbiór rozmyty, do którego jest największy stopień przynależności danej uczącej. W rezultacie powstaje następująca reguła:

JEŻELI x_1 jest M_1 I x_2 jest S TO y jest S

Po sformułowaniu reguł na podstawie wszystkich zestawów danych uczących konstruujemy tabelę dwuwymiarową przedstawioną na rys. 6.3 i w odpowiednie pola wpisujemy następnik dla danej pary danych wejściowych. Może się oczywiście zdarzyć, że ten sam wyjściowy zbiór rozmyty (następnik) wystąpi w kilku regułach. Wtedy jest wybierana ta, dla której stopień prawdziwości jest największy.

M_2					
M_1					
x_2 S		S			
D_1					
D_2					
	M_2	M_1	S	D_1	D_2
	x_1				

Rys. 6.3. Tabela reguł dla sterownika z dwoma wejściami i jednym wyjściem.
W zacienionym polu wpisano następnik utworzonej reguły

Opisany algorytm tworzenia bazy reguł rozmytych zaliczany jest do grupy metod z podziałem siatkowym (ang. grid partition). Zaletą takiego sposobu jest mała liczba wartości lingwistycznych dla każdej zmiennej wejściowej. Wadą jest wykładniczy wzrost liczby reguł wraz ze wzrostem przestrzeni wejściowej.

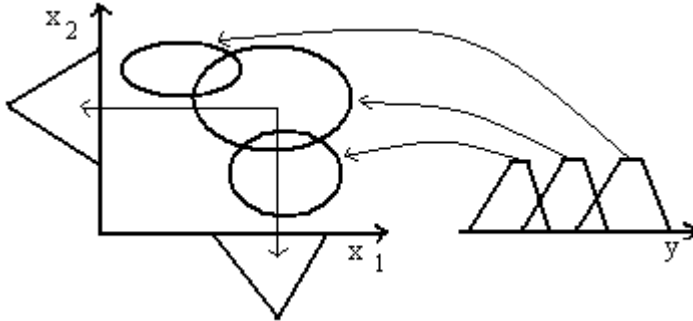
Wada ta jest wyeliminowana w metodzie z podziałem rozproszonym (ang. scatter partition). Algorytm wydobywania bazy wiedzy według tej metody według Sugeno -Yasukawy składa się z następujących kroków:

1. Rozmyte grupowanie danych wyjściowych zawartych w zbiorze uczącym (w oryginalnej metodzie stosowano algorytm rozmytych c-średnich, który zostanie opisany w rozdziale 7). Liczba grup będzie równa liczbie reguł rozmytych.
2. Przypisanie grupom danych wyjściowych zbiorów rozmytych o odpowiednio dobranych funkcjach przynależności. W oryginalnej metodzie były to funkcje trapezowe, których parametry były dopasowywane do zbioru uczącego. Oczywiście możliwe jest zastosowanie innych typów funkcji przynależności.
3. Przypisanie stopni przynależności po grupowaniu przestrzeni wyjściowej do

całej pary wejście-wyjście.

4. Uzyskiwanie przesłanek reguł poprzez projekcje na przestrzenie zmiennych wejściowych.

Zasada działania tego algorytmu jest zilustrowana na rys. 6.4.



Rys. 6.4. Metoda tworzenia reguł rozmytych Sugeno-Yasukawy

6. 3. Blok rozmywania

Na wejście sterownika rozmytego wchodzi sygnały ostre, dlatego też muszą podlegać procesowi rozmywania (ang. fuzzyfication). Dzięki tej operacji zostają przetworzone na zbiory rozmyte i mogą być poddawane dalszym działaniom w kolejnych etapach. Najczęściej stosowanym sposobem rozmywania jest singleton. Polega on na przyporządkowaniu funkcji przynależności równej 1 dla aktualnego wektora wejściowego \bar{x} i 0 dla pozostałych:

$$\mu_{A'}(\bar{x}) = \delta(x - \bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x = \bar{x} \\ 0 & \text{gdy } x \neq \bar{x} \end{cases} \quad (6.6)$$

Zdarza się, że sygnał wejściowy jest mierzony wraz z zakłóceniami. W tym przypadku stosowane jest rozmywanie typu non-singleton:

$$\mu_{A'}(\bar{x}) = \delta(x - \bar{x}) = \exp \left[- \frac{(x - \bar{x})^T (x - \bar{x})}{\delta} \right] \quad \text{dla } \delta > 0 \quad (6.7)$$

6. 4. Blok wnioskowania

Proces wnioskowania w oparciu o rozmyte wielkości wejściowe i bazę wiedzy odbywa się według zasad opisanych w rozdziale 5.6. Procedura otrzymywania wyjścia rozmytego składa się z następujących etapów:

1. Znalezienie poprzez rozmywanie wielkości wejściowych każdej reguły.
2. Znalezienie wyjścia każdej reguły w wyniku złożenia rozmytej wielkości wejściowej i rozmytej implikacji.
3. Agregacja wyjść poszczególnych reguł.

Zbiory rozmyte powstałe w wyniku działania poszczególnych reguł zależą od

rozmytej implikacji oraz sposobu zdefiniowania iloczynu kartezjańskiego zbiorów rozmytych na wejściu.

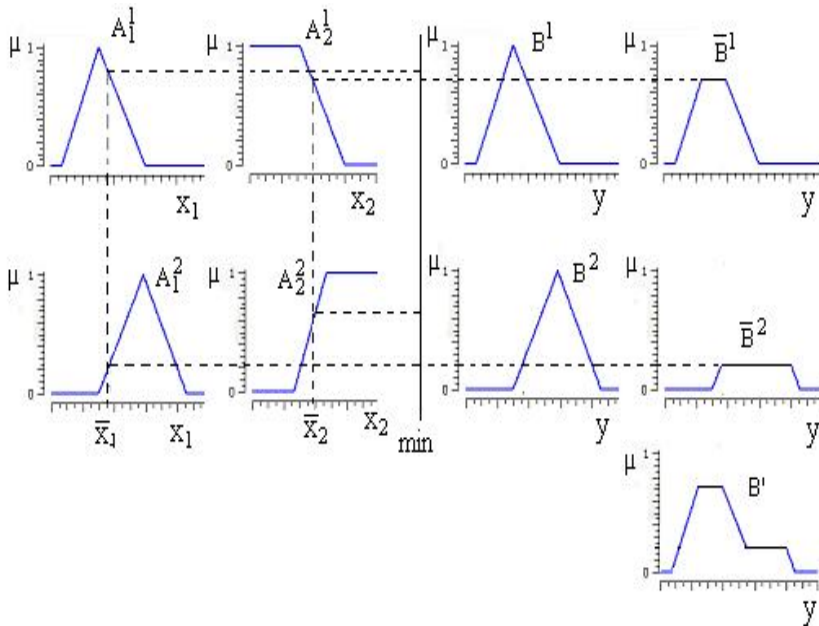
Przykład 6.2.

Przeanalizujemy sterownik rozmyty o dwóch wejściach i jednym wyjściu z następującą bazą reguł:

$$R^{(1)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^1 \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^1 \text{ TO } y \text{ jest } B^1$$

$$R^{(2)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^2 \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^2 \text{ TO } y \text{ jest } B^2$$

Funkcje przynależności do odpowiednich zbiorów rozmytych przedstawiono na rys. 6.5.



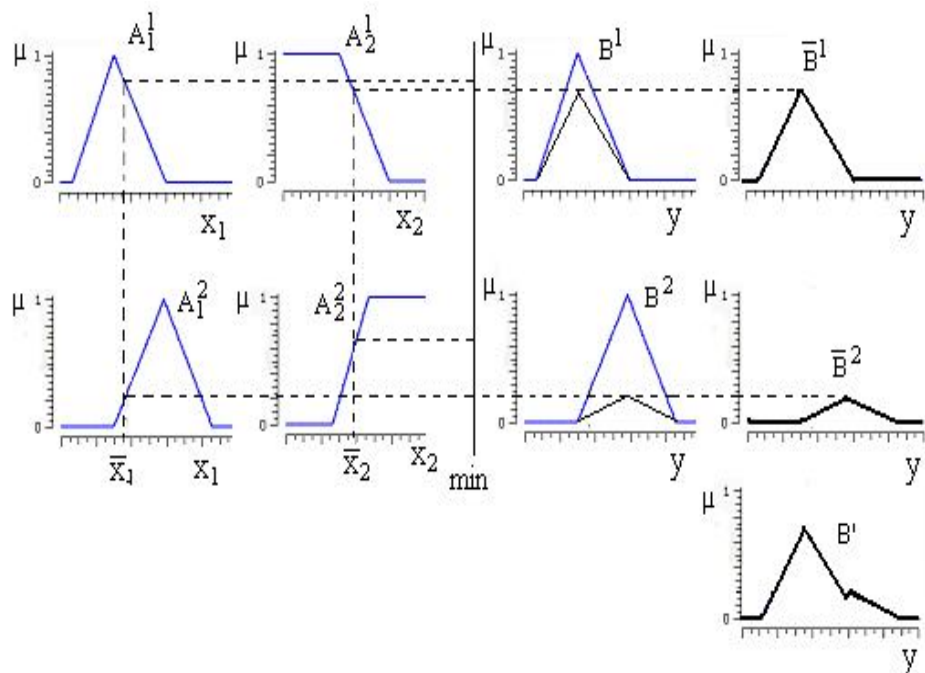
Rys.6.5. Przykład działania sterownika z implikacją Mamdaniego o dwóch wejściach i jednym wyjściu

Niech na wejściach tego sterownika pojawią się sygnały \bar{x}_1 i \bar{x}_2 . W wyniku rozmycia typu singleton i zastosowania operacji minimum, a następnie implikacji

Mamdaniego uzyskujemy zbiory rozmyte \bar{B}^1 i \bar{B}^2 . W opisanym przykładzie zastosowano do agregacji sumę standardową (operacja maksimum), w wyniku czego otrzymano zbiór rozmyty B'

Przykład 6.3.

Przeanalizujemy sterownik z przykładu 6.2 z zastosowaniem implikacji Larsena przy tych samych danych wejściowych i zastosowaniu sumy standardowej jako operatora agregacji. Rezultat wnioskowania przedstawiono na rys. 6.6.



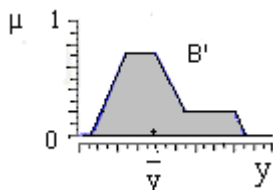
Rys.6.6. Przykład działania sterownika z implikacją Larsena o dwóch wejściach i jednym wyjściu

6. 5. Blok wyostrzania

Jeśli na wyjściu sterownika uzyskujemy jeden zbiór rozmyty możemy zastosować metodę środka ciężkości (ang. center of gravity method lub center of area method).

Ostrą wartość \bar{y} obliczymy według wzoru 6.8 (przy założeniu, że obie całki istnieją). Rys. 6.7 przedstawia sposób wyznaczania ostrej wartości metodą środka ciężkości.

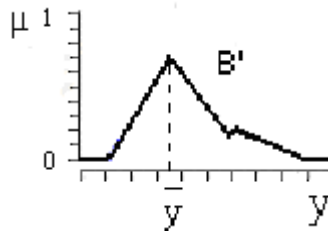
$$\bar{y} = \frac{\int y \mu_{B'}(y) dy}{\int \mu_{B'}(y) dy} \quad (6.8)$$



Rys. 6.7. Ilustracja wyostrzania metodą środka ciężkości

Najprostszą, lecz nie uwzględniającą kształtu funkcji przynależności, jest metoda maksimum funkcji przynależności (rys. 6.8):

$$\mu_{B'}(\bar{y}) = \sup \mu_{B'}(y) \quad (6.9)$$

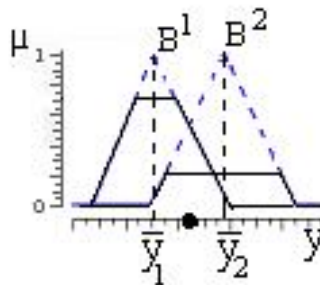


Rys. 6.8. Ilustracja wyostrzenia metodą maksimum funkcji przynależności

Jeśli na wyjściu sterownika otrzymujemy kilka zbiorów rozmytych (przy zastosowaniu metody FITA) może być zastosowane wyostrzenie *center average defuzzification* (ilustracja rys. 6.9). Wartość ostrą w tej metodzie wyznacza się według wzoru:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^K \bar{y}_k \mu_{B^k}(\bar{y}_k)}{\sum_{k=1}^K \mu_{B^k}(\bar{y}_k)} \quad (6.10)$$

Wartości \bar{y}_k , dla których funkcja przynależności zbiorów B^k jest maksymalna, nazywane są środkami (ang. center) tych zbiorów.



Rys. 6.9. Ilustracja wyostrzenia metodą center average defuzzification

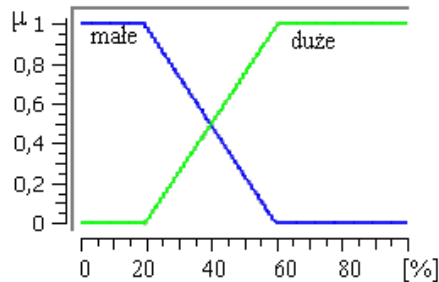
6. 6. Sterownik Mamdaniego-Assilana

W pierwszym historycznie systemie rozmytym opracowanym przez Mamdaniego i Assilana zastosowano operację minimum, jako t-normę dla łączników „I” oraz koniunkcyjną interpretację reguł. Tak więc zarówno stopień aktywacji, jak

i interpretacji reguł był wynikiem działania t-normy. Sterowniki, w których stosowane są wymienione operacje, noszą nazwę Mamdaniego-Assilana niezależnie od wyboru operatora agregacji oraz sposobu wyostrzania. Przeanalizujmy działanie tego typu sterownika na prostym przykładzie.

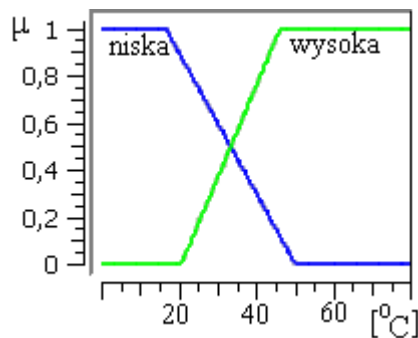
Przykład 6.4.

Rozważmy sterownik z dwoma wejściami i jednym wyjściem sterujący obrotami wentylatora chłodzącego w komputerze. Niech zmiennymi wejściowymi będzie obciążenie procesora i jego temperatura. W zależności od tych wielkości zmieniać będą się obroty wentylatora chłodzącego. Mamy więc dwie zmienne lingwistyczne wejściowe: *obciążenie procesora* oraz *temperatura procesora* oraz jedną zmienną lingwistyczną wyjściową: *zmiana obrotów wentylatora*. Zmiennej lingwistycznej *obciążenie procesora* przyporządkujemy dwie wartości: *małe* i *duże*. Zbiory rozmyte odpowiadające tym wartościom lingwistycznych przedstawiono na rys. 6.10.



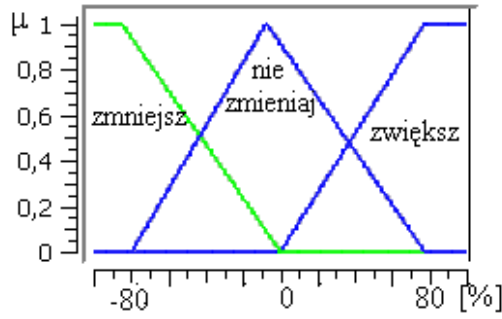
Rys. 6.10. Rozmyty podział przestrzeni obciążenie procesora wyrażone w %

Niech przestrzeń temperatur będzie również podzielona na dwa zbiory: *niska* i *wysoka*, którym odpowiadają funkcje przynależności przedstawione na rys. 6.11.

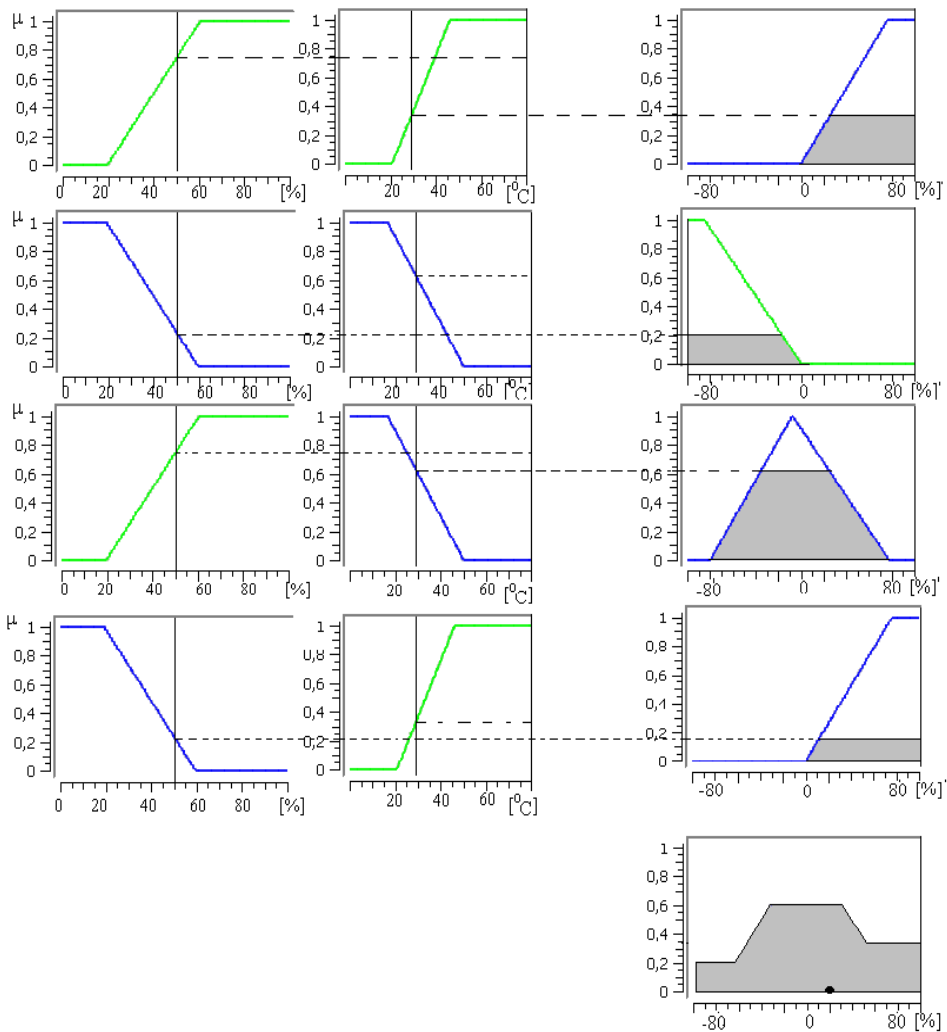


Rys. 6.11. Rozmyty podział przestrzeni temperatura

Zmienną lingwistyczną *zmiana obrotów wentylatora* określono w procentach przyrostu w przestrzeni $[-90\%, 90\%]$ i przypisano jej trzy wartości: *zmniejsz*, *nie zmieniaj* i *zwiększ* (rys. 6.12). Za wartość odniesienia, względem której następuje zmiana prędkości obrotowej wentylatora przyjęto jej wartość przy temperaturze procesora $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.



Rys. 6.12. Zbiory rozmyte odpowiadające wartościom zmiennej lingwistycznej „zmiana szybkości obrotów wentylatora”



Rys. 6.13. Działanie sterownika Mamdani-Assilana

Baza wiedzy została opracowana na podstawie opinii eksperta i składała się z czterech reguł:

$R^{(1)}$: JEŻELI *obciążenie procesora jest duże* I *temperatura procesora jest wysoka* TO *zwiększ prędkość obrotów wentylatora*

$R^{(2)}$: JEŻELI *obciążenie procesora jest małe* I *temperatura procesora jest niska* TO *zmniejsz prędkość obrotów wentylatora*

$R^{(3)}$: JEŻELI *obciążenie procesora jest duże* I *temperatura procesora jest niska* TO *nie zmieniaj prędkości obrotów wentylatora*

$R^{(4)}$: JEŻELI *obciążenie procesora jest małe* I *temperatura procesora jest wysoka* TO *zwiększ prędkość obrotów wentylatora*

Aktywacja reguł przy następujących wartościach wejściowych ostrych: obciążenie procesora równe 50% i temperatura procesora - 29°C przedstawia rys. 6.13. Po zastosowaniu sumy standardowej (max) jako operatora agregacji otrzymano zbiór rozmyty przedstawiony w prawym dolnym rogu rysunku. Po wyostrzeniu metodą środka ciężkości uzyskano wartość ostrą 19%. Oznacza to, że prędkość obrotowa wentylatora powinna wzrosnąć o 19%.

Zaproponowany sterownik nie jest oczywiście modelem do praktycznych zastosowań. Został przedstawiony tylko w celu wyjaśnienia działania tego typu sterowników. Łatwo zauważyć, że nawet w tak prostym układzie nakład obliczeniowy wynikający z wyostrzenia jest dość duży.

6. 7. System rozmyty Takagi-Sugeno-Kanga

W systemie rozmytym Takagi-Sugeno-Kanga baza wiedzy składa się z reguł rozmytych, w których wielkość wyjściowa jest określona funkcją o argumentach ostrych. Reguła rozmyta o numerze k przedstawiona wzorem 5.12 w podrozdziale 5.5 przyjmuje w tym systemie postać następującą:

$$R^{(k)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k, \text{ I } \dots \text{ I } x_N \text{ jest } A_N^k \\ \text{TO } y^k = F^k(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (6.11)$$

Konkluzję tak zdefiniowanych reguł można interpretować jako singeltony o położeniu wyznaczonym przez funkcję $F^k(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Na wyjściu każdej z reguł warunkowych otrzymywana jest wartość numeryczna y^k . Wynik końcowy obliczany jest jako średnia ważona wartości wyjściowych ze wszystkich reguł:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^K w^k y^k}{\sum_{k=1}^K w^k} \quad (6.12)$$

Współczynniki wagowe dla każdej reguły są wynikiem działania t-normy na rozmyte zbiory wejściowe, a więc można zapisać, że:

$$w^k = \mu_{A_1^k}^T(x_1) * \mu_{A_2^k}^T(x_2) * \dots * \mu_{A_N^k}^T(x_N) \quad (6.13)$$

W sterownikach tego typu najczęściej stosowana jest funkcja liniowa. System Takagi-Sugeno-Kanga z funkcjami liniowymi jest nazywany przełączanym modelem regresyjnym (ang. switching regression model).

System Takagi-Sugeno-Kanga jest także interpretowany, jako konsylium ekspertów (ang. mixture of experts), z których każdy określa związek między wyjściem a wejściem. Jedna reguła jest modelem jednego eksperta. Zbiór reguł jest więc dynamicznym konsylium ekspertów.

Przykład 6.5.

Zaprojektujmy sterownik Takagi-Sugeno-Kanga z dwiema wielkościami wejściowymi: x_1 i x_2 , zmieniającymi się w zakresie $[0,1]$ oraz jedną wielkością wyjściową y . Przyjmijmy, że baza składa się z następujących reguł:

$R^{(1)}$: JEŻELI x_1 jest duże I x_2 jest małe TO $y_1 = x_1 + x_2$

$R^{(2)}$: JEŻELI x_1 jest małe I x_2 jest duże TO $y_2 = 1 - 2x_1 + x_2$

Ilustrację aktywacji reguł przy zmiennych wejściowych $x_1 = 0,4$ oraz $x_2 = 0,6$ przedstawiono na rys. 6.14. Możemy obliczyć, że:

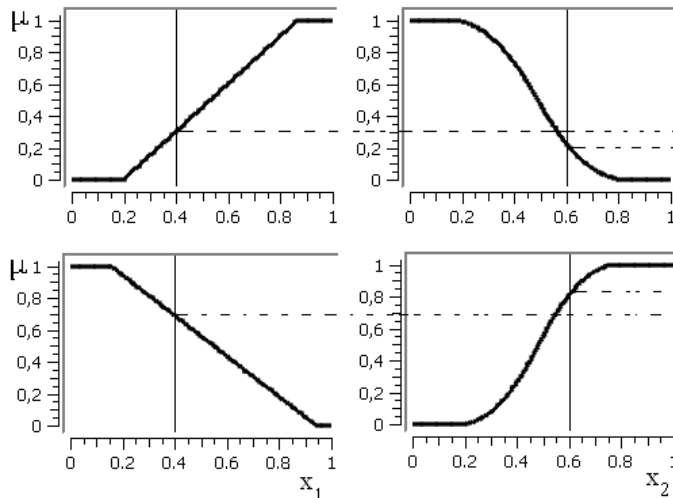
$$y_1 = 0,4 + 0,6 = 1,0 \quad \text{oraz} \quad y_2 = 1 - 0,8 + 0,6 = 0,8$$

Zastosujmy t-normę standardową do wyznaczania współczynników wagowych.

$$\text{Otrzymamy: } w^1 = \min(0,3; 0,2) = 0,2 \quad \text{oraz} \quad w^2 = \min(0,7; 0,8) = 0,7.$$

Wartość wyjściowa sterownika wyniesie:

$$y = \frac{w^1 y_1 + w^2 y_2}{w_1 + w_2} = \frac{0,2 \cdot 1 + 0,7 \cdot 0,8}{0,2 + 0,7} = \frac{0,76}{0,9} \approx 0,84$$



Rys. 6.14. Rozmyte zbiory wejściowe w sterowniku Takagi-Sugeno-Kanga opisanego w przykładzie 6.5

6. 8. System rozmyty Łęskiego-Czogały

W pracach Łęskiego i Czogały zaproponowano system rozmyty z konkluzjami parametrycznymi. Idea tego typu rozwiązania polega na tym, że parametry zbiorów rozmytych w konkluzjach mogą zależeć od wybranych parametrów wejściowych zbiorów rozmytych, na przykład położenia ich środków ciężkości, wysokości, szerokości itp.

Ogólną regułę wnioskowania dla tego typu systemu można przedstawić następująco:

$$\begin{array}{l} R^{(k)}: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k, \text{ I } \dots \text{ I } x_N \text{ jest } A_N^k \\ \text{TO } y_1 \text{ jest } B_1^k(\theta) \text{ I } y_2 \text{ jest } B_2^k(\theta) \text{ I } \dots \text{ I } y_M \text{ jest } B_M^k(\theta) \end{array} \quad (6.14)$$

Występujący w powyższej regule wektor θ ma składowe będące wybranymi parametrami zbiorów rozmytych wejściowych, na przykład ich szerokości: $\theta = [\text{szer}(A_1'), \text{szer}(A_2'), \dots, \text{szer}(A_N')]$.

Jeżeli zbiory wejściowe są singletonami, a w konkluzjach reguł warunkowych są zbiory rozmyte o stałym położeniu, to system ten przechodzi w Mamdaniego-Assilana. Jeśli w konkluzjach reguł warunkowych są singeltony, system jest równoważny systemowi Takagi-Sugeno-Kanga.

Opis powyższych systemów nie wyczerpuje wszystkich możliwości zastosowań reguł warunkowych w sterownikach rozmytych. Zachęcam Czytelnika do poznania innych ciekawych rozwiązań na podstawie dołączonego wykazu literatury [5, 8, 14, 20, 24].

ROZDZIAŁ 7

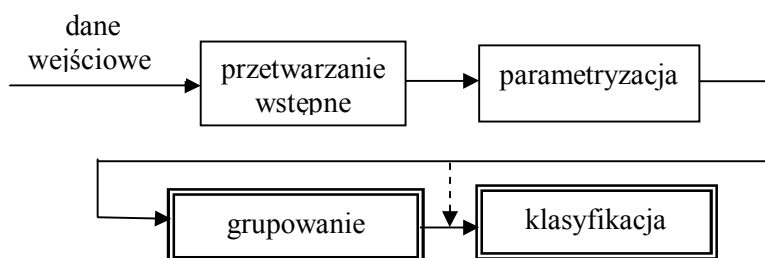
ROZMYTE ROZPOZNAWANIE WZORCÓW

7.1. Podstawy automatycznego rozpoznawania wzorców.....	84
7.2. Grupowanie rozmyte.....	84
7.2.1. Rozmyty algorytm c-średnich.....	85
7.2.2. Algorytm Gustafsona-Kessela.....	88
7.2.3. Ocena jakości grupowania.....	88
7.3. Klasyfikatory rozmyte.....	89

7.1. Podstawy automatycznego rozpoznawania wzorców

Automatyczne rozpoznawanie wzorców (ang. pattern recognition) jest procedurą poszukiwania pewnych struktur danych i klasyfikowania tych struktur do określonych kategorii. Obecnie wykorzystuje się systemy automatycznego rozpoznawania pisma, obrazów medycznych, elektrokardiogramów, elektroencefalogramów, mowy, mówców, twarzy, klasyfikacji chromosomów i wiele innych.

W procesie automatycznego rozpoznawania wzorców można wyróżnić cztery podstawowe etapy (rys. 7.1) Pierwszy (przetwarzanie wstępne) obejmuje reprezentację danych uzyskanych eksperymentalnie z badanego obiektu. Generalnie dany obiekt jest reprezentowany przez wektor zmiennych pomiarowych $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$. W etapie drugim (parametryzacja) następuje wyodrębnienie parametrów istotnych dla rozpoznawania określonego rodzaju danych. Następny etap koncentruje na grupowaniu wyodrębnionych parametrów, w wyniku czego zostaje zredukowany wymiar wektora wejściowego. Ostatnim problemem jest dobór odpowiedniej procedury klasyfikacji, która będzie przypisywała daną grupę parametrów do określonej kategorii. Jak widać na rys. 7.1 (strzałka przerywana) grupowanie danych może być pominięte w procesie rozpoznawania jakkolwiek w bardzo wielu procedurach stanowi istotny jego etap. W procesie rozpoznawania często stosowane są procedury naśladujące zdolności klasyfikacyjne człowieka z uwzględnieniem nieostrych granic dzielących grupy i kategorie. W tych metodach uzasadnione jest zastosowanie logiki rozmytej zarówno w procesie grupowania, jak również klasyfikacji (na rys. 7.1 etapy, w których stosowana jest logika rozmyta wyróżnione zostały podwójnymi liniami).



Rys. 7.1. Ogólny schemat rozpoznawania wzorców

Grupowanie (ang. clustering) jest ważnym problemem rozpoznawania, gdyż wiąże się z redukcją wymiarowości wektora wejściowego. Jak już wspomniano w bardzo wielu przypadkach granice poszczególnych grup nie są ostre. Z tego względu stosowaną techniką jest grupowanie rozmyte (ang. fuzzy clustering).

7.2. Grupowanie rozmyte

Grupowanie danych, czyli podział dużego zbioru danych na podobne pod

względem pewnych cech obiektu (lub sytuacji), to jedna z podstawowych zdolności organizmów żywych. Pozwala na zrozumienie, systematyzację, tworzenie modeli, a także ich klasyfikację. Idea grupowania polega na podziale zbioru N obserwacji na c klas. Tradycyjne algorytmy grupowania mogą być stosowane wtedy, gdy potencjalne grupy są dobrze odseparowane, czyli dany wektor danych należy tylko do jednej grupy. W praktyce często występują jednak grupy bez wyraźnych granic, w których dane mogą należeć częściowo do kilku grup. Dlatego coraz szersze zastosowanie w tych aplikacjach, np: tworzonych dla celów medycznych, znajdują metody grupowania rozmytego. Obecnie jest wiele algorytmów grupowania rozmytego, z których najbardziej popularny jest rozmyty algorytm c -średnich (ang. fuzzy c -means algorithm).

7.2.1 Rozmyty algorytm c -średnich

Algorytm c -średnich został opracowany w celu rozwiązania problemów optymalizacyjnych przez Bezdeka (1981).

Dla przejrzystości opisu oznaczymy numer wektora wejściowego przez n ($n=1,2,\dots,N$). Niech każdy n -ty wektor będzie K -wymiarowy. $\mathbf{x}_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}, \dots, x_{n,K}\}$. Podzielmy zbiór N wektorów wejściowych na c podzbiorów rozmytych A_1, A_2, \dots, A_c przypisując każdemu z wektorów stopnie przynależności do tych podzbiorów. Dla n -tego wektora będzie to zbiór $\{\mu_1(\mathbf{x}_n), \mu_2(\mathbf{x}_n), \dots, \mu_i(\mathbf{x}_n), \dots, \mu_c(\mathbf{x}_n)\}$, czyli każdy wektor wejściowego przynależy w określonym stopniu do wszystkich podzbiorów rozmytych. Powinien być oczywiście zachowany warunek, że suma stopni przynależności do wszystkich grup dla danego wektora wejściowego jest równa 1 (wzór 7.1):

$$\sum_{i=1}^c \mu_i(\mathbf{x}_n) = 1 \quad (7.1)$$

Każdemu zbiorowi rozmytemu przypisywane jest centrum \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, c$), które również jest K -wymiarowym wektorem $\mathbf{v}_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,K}\}$. Wektor (i -ty) centralny jest wyliczany według wzoru:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m \mathbf{x}_n}{\sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m} \quad (7.2)$$

Występujący we wzorze 7.2 parametr $m > 1$ jest liczbą rzeczywistą regulującą wpływ stopni przynależności. Wektor \mathbf{v}_i będący centrum grupy jest średnią ważoną wektorów wejściowych.

Grupowanie polega na minimalizacji funkcji kryterialnej, która jest określona wzorem:

$$J_m = \sum_{i=1}^c \sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_i) \quad (7.3)$$

$d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_i)$ jest odległością n -tego wektora wejściowego od centrum i -tej grupy.

Stosowana jest odległość euklidesowa:

$$d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n)^T (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n) \quad (7.4)$$

Rozwiązanie problemu grupowania sprowadza się do znalezienia centrów, dla których funkcja J_m osiąga wartość minimalną.

Algorytm rozmytych c -średnich składa się z następujących kroków:

1. Przyjęcie wartości c i m , wprowadzenie wskaźnika iteracji $t=0$ i przypisanie wektorom danych wejściowych w sposób losowy wartości stopni przynależności $\mu_i^t(x_n)$ do c zbiorów rozmytych. Funkcje przynależności muszą spełniać warunek 7.1.

2. Obliczenie centrów \mathbf{v}_i^t (t – krok iteracji) według wzoru 7.2 oraz funkcji J_m^t zgodnie ze wzorem 7.3

3. Obliczenie nowych wartości funkcji przynależności zgodnie ze wzorem:

$$\mu_i^{t+1}(\mathbf{x}_n) = \frac{[d(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_j)]^{\frac{2}{1-m}}}{\sum_{j=1}^c [d(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_j)]^{\frac{2}{1-m}}} \quad (7.5)$$

Jeśli mianownik byłby równy 0 przyjmuje się $\mu_i^{t+1}(\mathbf{x}_n) = 0$.

4. Obliczenie nowych centrów funkcji przynależności \mathbf{v}_i^{t+1} według wzoru 7.2 i funkcji J_m^{t+1} ze wzoru 7.3.

5. Porównanie J_m . Jeśli $J_m^{t+1} - J_m > \varepsilon$ (ε - wartość przyjęta jako minimalne odchylenie) zwiększenie wskaźnika iteracji o 1 ($t = t+1$) i skok do punktu 2, w przeciwnym razie stop.

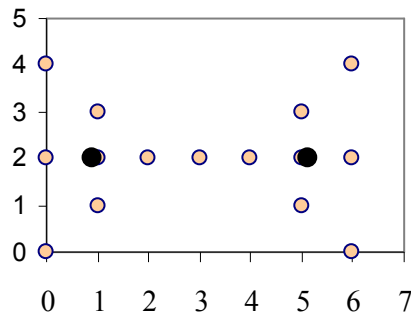
Parametr m w rozmytej metodzie c -średnich wpływa na stopień rozmycia powstających grup. Są one tym bardziej rozmyte im parametr m ma większą wartość.

Przykład 7.1.

Rozważmy przykład grupowania 15 dwuwymiarowych danych (n - numer wektora wejściowego) opisany przez Bezdeka w 1981 r. Zbiór danych zamieszczono w tabeli 7.1. Może być rozumiany, jako zbiór punktów na płaszczyźnie (rys. 7.2). Na rys. 7.2 zaznaczono zaczernionymi kółkami wyznaczane metodą c -średnich punkty centralne.

Tabela 7.1 Dane wejściowe w przykładzie 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{n,1}$	0	0	0	1	1	1	2	3	4	5	5	5	6	6	6
$x_{n,2}$	0	2	4	1	2	3	2	2	2	1	2	3	0	2	4



Rys. 7.2. Ilustracja do przykładu 7.1

Punkty centralne uzyskano po $t=6$ iteracjach. Ich współrzędne to odpowiednio $V_1 = [0,88; 2]$ i $V_2 = [5,14; 2]$. Kolejne etapy procedury przebiegały następująco.

W pierwszym kroku przyjęto że $c=2$ oraz podzielono dane wejściowe na dwa zbiory rozmyte przyjmując, że stopień przynależności do pierwszego z nich jest dla każdego wektora równy 0,854. Zgodnie z warunkiem, że suma stopni przynależności dla danego wektora do wszystkich zbiorów rozmytych powinna być równa 1 (wzór 7.1), otrzymujemy stopień przynależności równy 0,146 do drugiego zbioru rozmytego w kroku pierwszym. Tak więc na początek mamy dwa następujące zbiory rozmyte:

$$A_1 = 0,854/x_1 + 0,854/x_2 + \dots + 0,854/x_{15}$$

$$A_2 = 0,146/x_1 + 0,146/x_2 + \dots + 0,146/x_{15}$$

Po $t=6$ iteracjach funkcje przynależności kolejnych wektorów do zbiorów rozmytych A_1 i A_2 oznaczone jako $\mu_1(X_n)$ oraz $\mu_2(X_n)$ były następujące:

Tabela 7.2. Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych A_1 i A_2 w przykładzie 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\mu_1(X_n)$	0,99	1	0,99	1	1	1	0,99	0,47	0,01	0	0	0	0,01	0	0,01
$\mu_2(X_n)$	0,01	0	0,01	0	0	0	0,01	0,53	0,99	1	1	1	0,99	1	0,99

Łatwo zauważyć, że na granicy dwóch zbiorów znajduje się dana 8 [3,2], która przynależy w stopniu 0,47 do zbioru rozmytego A_1 i 0,53 do A_2 .

W przedstawionej metodzie zakłada się, że grupy mają jednakowy kształt geometryczny. Opracowano wiele algorytmów rozszerzających tą metodę i pozwalających na przypisanie poszczególnym grupom różnych kształtów geometrycznych. Jednym takich algorytmów jest metoda Gustafsona i Kessela.

7. 2. 2. Algorytm Gustafsona-Kessela

Algorytm Gustafsona-Kessela pozwala na różnorodność kształtów poszczególnych grup. Każdej grupie jest w nim przypisywana odrębna, modyfikowana w działaniu algorytmu, macierz A_i . Odległość obiektu od środka grupy jest określana zależnością:

$$d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n)^T A_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n) \quad (7.6)$$

Funkcja kryterialna jest wyznaczana podobnie jak w rozmytym algorytmie c-średnich (wzór 7.3). Poprawne działanie algorytmu wymaga ograniczenia macierzy A_i , np. poprzez przyjęcie pewnej wartości ich wyznaczników ($\det(A_i)$):

$$\det(A_i) = \rho_i \quad (7.7)$$

Wartości ρ_i są przyjmowane na podstawie wiedzy o grupowanych danych. Jeśli takiej wiedzy nie ma, wstawia się $\rho_i=1$ dla wszystkich grup.

Modyfikacja macierzy A_i jest wynikiem minimalizacji kryterium (wzór 7.3) i w związku z tym:

$$A_i = \rho_i [\det(F_i)]^{1/p} F_i^{-1} \quad (7.8)$$

F_i –rozmyta macierz kowariancji i-tej grupy:

$$F_i = \frac{\sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n)^T (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_n)}{\sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m} \quad (7.9)$$

Algorytm składa się z następujących kroków:

1. Przyjęcie wartości c i m , ρ_i , wprowadzenie wskaźnika iteracji $t=0$ i przypisanie wektorom danych wejściowych w sposób losowy wartości stopni $\mu_i^t(\mathbf{x}_n)$ przynależności do c zbiorów rozmytych
2. Obliczenie F_i^t według wzoru 7.9 i A_i^t wg wzoru 7.8
3. Obliczenie $[d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_i)]$ wg wzoru 7.6 dla wskaźnika iteracji t
4. Obliczenie centrów \mathbf{v}_i^t (t – krok iteracji) według wzoru 7.2 oraz funkcji J_m^t zgodnie ze wzorem 7.3 z odległością wg wzoru 7.6.
5. Obliczenie nowych wartości funkcji przynależności zgodnie ze wzorem 7.5 z podstawieniem odległości ze wzoru 7.6.
6. Obliczenie nowych centrów funkcji przynależności \mathbf{v}_i^{t+1} według wzoru 7.2 i funkcji J_m^{t+1} ze wzoru 7.3 (z odległością wyznaczaną wg 7.6).
7. Porównanie J_m . Jeśli $J_m^{t+1} - J_m > \varepsilon$ (ε - wartość przyjęta jako minimalne odchylenie) $t = t + 1$ i skok do punktu 2, w przeciwnym razie stop.

7.2.3. Ocena jakości grupowania

Opisane algorytmy wymagają wstępnego określenia liczby punktów centralnych. Jest jednak wiele sytuacji, kiedy liczba potencjalnych grup nie jest znana. Wtedy należy wykonać grupowanie dla różnej liczby grup i dla każdego

podziału dokonać oceny jego jakości przy wykorzystaniu wskaźników jakości grupowania, które zostaną przedstawione poniżej.

Najprostszym wskaźnikiem jest stopień rozmycia macierzy podziału V_1 :

$$V_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{n=1}^N \mu_i(\mathbf{x}_n) \quad (7.10)$$

Podział jest wtedy optymalny, gdy wskaźnik ten osiąga wartość maksymalną. Sytuacja taka jest wtedy, gdy każdy wektor \mathbf{x}_n jest bardzo silnie związany z jedną tylko grupą. Oznacza to, że stopnie przynależności do każdej grupy są duże, a więc w rezultacie wartość wskaźnika V_1 jest duża.

Inny wskaźnik V_2 określa entropię podziału:

$$V_2 = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{n=1}^N \mu_i(\mathbf{x}_n) \ln[\mu_i(\mathbf{x}_n)] \quad (7.11)$$

Optymalnym podziałem jest taki, dla którego wartość wskaźnik V_2 jest minimalny.

Wskaźniki V_1 i V_2 zależą od liczby grup natomiast pozostają bez związku z kształtem geometrycznym ich powierzchni. Wskaźnik Fukuyamy-Sugeno V_3 umożliwia taki związek.

$$V_3 = \sum_{i=1}^c \sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m [d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) - d^2(\mathbf{x}_n, \bar{\mathbf{v}})] \quad (7.12)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \quad (7.13)$$

Optymalny podział jest uzyskany przy minimalnej wartości tego wskaźnika.

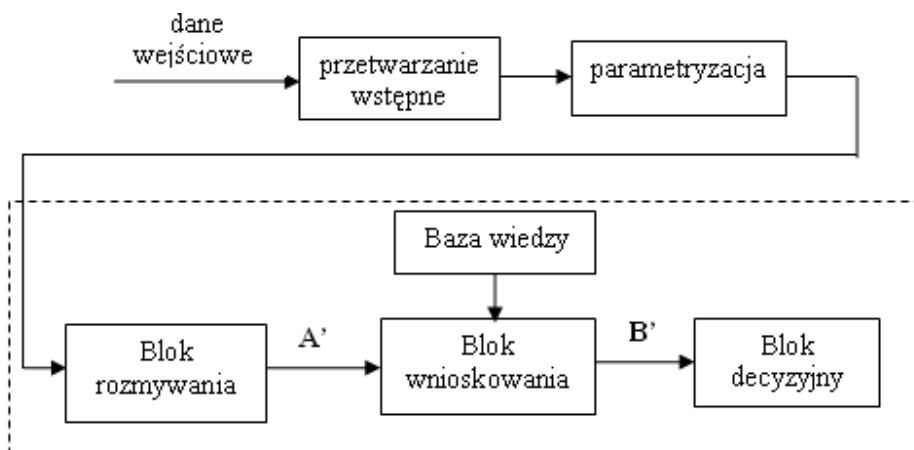
Wskaźnik Xie-Bieni V_4 jest wyliczany na podstawie ilorazu średniej odległości wszystkich odległości i najmniejszej odległości między grupami $d^2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$:

$$V_4 = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{n=1}^N [\mu_i(\mathbf{x}_n)]^m d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)}{N \min[d^2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)]} \quad (7.14)$$

Optymalny podział jest uzyskiwany przy minimalizacji tego wskaźnika.

7.3. Klasyfikatory rozmyte

Wnioskowanie rozmyte znajduje zastosowanie praktyczne w rozwiązaniach klasyfikatorów rozmytych w tych przypadkach, w których niemożliwe jest ustalenie wyraźnych granic między kategoriami. Klasyfikator rozmyty zawiera podstawowe elementy sterownika rozmytego (rys. 7.3). Dane wejściowe po przetworzeniu wstępnym i parametryzacji są rozmywane. Następnie przeprowadzane jest wnioskowanie rozmyte i na tej podstawie zaliczenie danych wejściowych do określonej kategorii.

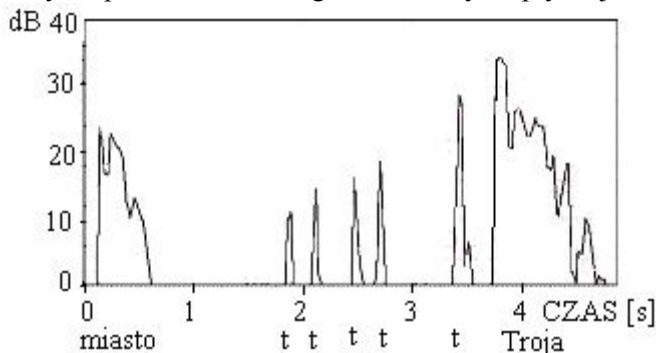


Rys. 7.3. Schemat blokowy klasyfikatora rozmytego

Działanie jednego z rozmytych systemów rozpoznających zostało opisane na przykładzie procedury do automatycznej detekcji niepełności mowy. Przedstawiona poniżej procedura automatycznego rozpoznawania niepełności mowy przy zastosowaniu wnioskowania rozmytego została opracowana w celu komputerowego wspomaganie diagnozy logopedycznej. W chwili obecnej praktycznie jedynym narzędziem diagnostycznym jest ucho logopedy. Bardzo rzadko w poradniach dokonuje się bieżących nagrań wypowiedzi osób poddawanych terapii i śledzenia na ich podstawie efektów działań korekcyjnych. Spowodowane to jest brakiem nieskomplikowanych narzędzi do analizy takich zapisów. Jąkanie jest najbardziej złożonym zaburzeniem mowy. Ocena ostrości tego zaburzenia, a także postępów terapii wymaga określenia częstości pojawiania się danego rodzaju niepełności (którymi mogą być przedłużenia głosek, powtórzenia głosek i sylab, bloki, wtrącenia) oraz pomiarów czasów ich trwania. Ważne w diagnozie jest także określenie akustycznych i lingwistycznych uwarunkowań pojawiania się niepełności u poszczególnych osób. Okazuje się, że dla bardzo wielu osób, zwłaszcza dorosłych, które zmagają się z tym zaburzeniem, istnieją pewne słowa, przy których trudności w mówieniu pojawiają się szczególnie często. Jest też tendencja do częstszych niepełnych realizacji słów rozpoczynających się od pewnych głosek. Dotyczy to głosek trących, nosowych i zwartych. Niepełności przy realizacji tych głosek wynikają często z niekontrolowanych, utrzymujących się przez długi czas skurczów mięśni artykulacyjnych – tzw. blokad i stanowią jedną z cięższych form jąkania. W przypadku głosek trących i nosowych wynikiem takiego skurczu jest przedłużenie dźwięku. Podczas wypowiedzania głosek zwartych niepełności mają charakter wielokrotnych krótkich impulsowych artykulacji przedzielonych, często bardzo długo trwającymi, okresami tzw. napiętej przerwy (ang. tense pause) lub wtrąconym dźwiękiem. Te cechy powtarzają się w wypowiedziach różnych osób i stanowią mogą akustyczną podstawę automatycznego rozpoznawania tego rodzaju zaburzeń. W przypadku tak złożonego zaburzenia

nie da się jednak ustalić ostrych granic pomiędzy mierzalnymi parametrami, dlatego celowe jest zastosowanie logiki rozmytej. Dla przykładu jedną z cech dystynktywnych tego rodzaju nie płynności jest czas trwania oddzielonego przerwami fragmentu mowy. Jeśli jest „krótki” istnieje prawdopodobieństwo nie płynnej głoski zwartej. Nie można jednak ustalić ostrej granicy pozwalającej na zaliczenie danego odcinka do zbioru „krótki”. Podobnie z innymi parametrami.

System rozpoznający pobierał dane z plików dźwiękowym zarejestrowanych przy zastosowaniu karty dźwiękowej [21]. Reprezentowały one przebiegi wartości ciśnienia akustycznego w funkcji czasu. Sygnały te zostały przetworzone na reprezentacje częstotliwościowe przy wykorzystaniu algorytmu szybkiej transformaty Fouriera (ang. Fast Fourier Transform – FFT) z zastosowaniem okna Hamminga o szerokości 512 próbek (przy częstotliwości próbkowania 20050 Hz). Otrzymane przebiegi spektralno-czasowe poddano filtracji przy wykorzystaniu 21 cyfrowych filtrów 1/3-oktawowych. Taki sposób przetwarzania przybliży analizę do percepcji układu słuchowego człowieka, który może być przedstawiony jako zbiór filtrów pasmowych. Ponieważ subiektywna głośność dźwięku zależy nie tylko od poziomu natężenia dźwięku, ale również od częstotliwości, zastosowano filtr korekcyjny A, symulujący sposób odbioru dźwięku przez ucho ludzkie. Średni poziom natężenia dźwięku obliczono jako średnią wartość we wszystkich filtrach w każdej chwili czasowej. Na rys. 7.4 przedstawiono wynik przetworzenia fragmentu mowy nie płynnej.



Rys. 7.4. Średni poziom dźwięku w wypowiedzi nie płynnej

Podstawą do opracowania zastosowanej w tym systemie bazy wiedzy były pomiary czasów trwania fragmentów mowy i poprzedzających je oraz następujących po nich przerw, charakteryzujących ten typ nie płynności oraz mowę płynną. Znalezione różnice posłużyły jako podstawa do opracowania procedur do automatycznej detekcji tych epizodów.

W przypadku tak złożonego zaburzenia nie da się jednak ustalić ostrych granic pomiędzy mierzalnymi parametrami, dlatego autorzy zastosowali logikę rozmytą. Dla przykładu jedną z cech dystynktywnych tego rodzaju nie płynności jest czas trwania, oddzielonego przerwami, fragmentu mowy. Jeśli sygnał odpowiadający temu fragmentowi jest krótki istnieje prawdopodobieństwo że jest to nie płynna

realizacja głoski zwartej. Nie można jednak ustalić ostrej granicy pozwalającej na zaliczenie danego odcinka do zbioru krótki. Podobnie jest też z innymi parametrami

Niepłynności podczas wypowiedzania słów rozpoczynających się od głosek zwartych wybrano z wypowiedzi 11 osób z różnych okresów terapii. Pochodziły one z tekstów czytanych, monologów (opisów rysunków) oraz rozmów z osobą prowadzącą badanie.

Wybierano ok. 4-sekundowe odcinki mowy, przy czym każdy zawierał niepłynny fragment wraz z jego płynnym otoczeniem. Każdemu z tych odcinków przyporządkowano płynną identyczną wypowiedź tej samej osoby w sytuacji mówienia z echem oraz osoby mówiącej płynnie. Płynnymi mówcami byli studenci. Posługując się programami do edycji oscylogramów i spektrogramów (Creative WaveStudio i Gram) zmierzono następujące wielkości: 1) Czas trwania wybuchowego fragmentu mowy charakteryzującego głoski zwarte (w dalszej części opisu skrótowo będą nazywane „czasem trwania głoski zwartej”). 2) Czas trwania przerw otaczających te fragmenty w wypowiedziach niepłynnych i płynnych.

W płynnych realizacjach większość czasów trwania tych fragmentów nie przekracza 50 ms. Podczas niepłynnych realizacji zdarzają się dłuższe przebiegi, ale większość z nich nie przekracza 70 ms. Identyfikacja niepłynnej realizacji głoski zwartej jest możliwa poprzez znalezienie krótkich oddzielonych przerwami fragmentów wypowiedzi. Tak więc parametrami do identyfikacji tych epizodów są czasy trwania fragmentów i otaczających przerw. Automatyczna detekcja niepłynnych głosek zwartych realizowana była poprzez analizę przebiegu czasowego poziomu średniego. Pierwszym krokiem detekcji był pomiar czasów trwania fragmentów ciągłych mowy i przerw je otaczających. Czasy trwania fragmentów mowy i przerw między nimi były wyznaczane wg algorytmu składającego się z następujących etapów:

1) Znalezienie początkowego (p_j) i końcowego (e_j) momentu danego (j -tego) fragmentu mowy według formuł:

$$p_j = 0,5t [\text{sign}(x(t) - L_{sz}) - \text{sign}(x(t-1) - L_{sz})] d_t$$

$$e_j = 0,5t [\text{sign}(x(t) - L_{sz}) - \text{sign}(x(t-1) - L_{sz})] g_t$$

gdzie: t - numer kolejnej próbki czasowej, $x(t)$ - średni poziom, L_{sz} - poziom szumu, natomiast funkcje sign oraz d_t i g_t wyznaczono według wzorów:

$$\text{sign } x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x(t) \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x(t) < 0 \end{cases}$$

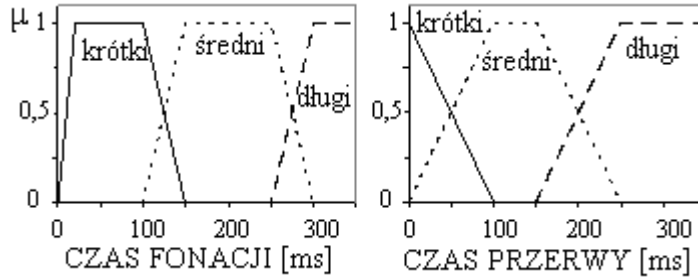
$$d_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} > 0 \\ 0 & \text{dla } \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \leq 0 \end{cases} \quad g_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} < 0 \\ 0 & \text{dla } \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t) - L_{sz} - (x(t-1) - L_{sz})}{t - (t-1)} = x(t) - x(t-1)$$

2) Wyznaczenie czasu trwania kolejnego j -tego fragmentu: $S(j) = e_j - p_j$

3) Wyznaczenie czasu trwania przerwy poprzedzającej (B – before): $B(j)=p_j-e_{j-1}$ (j-ty) fragment oraz następującej po nim (A – after) $A(j)=p_{j+1}-e_j$.

Na podstawie danych pomiarowych i opinii dwu ekspertów podzielono przestrzeń czasów trwania na zbiory rozmyte *krótki*, *średni*, *długi* (rys. 7.5)



Rys. 7.5. Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: *krótki*, *średni*, *długi* czas fonacji i czas przerwy

Bazę wiedzy opracowano w oparciu o opisane wcześniej wyniki pomiarów. Początkowo zaproponowano 15 reguł, które zamieszczono w tabeli 7.3. Poszczególne wartości rozmyte są połączone spójnikiem AND.

Tabela 7.3. Pierwotna baza reguł rozmytych do rozpoznawania nie płynności przy artykulacji głosek zwartych

Nr reguły	Czas trwania fragmentu mowy (S)	Czas trwania przerwy przed fonacją (B)	Czas trwania przerwy po fonacji mowy (A)	Sąsiedztwo	Klasyfikacja
1	krótki	długi	długi		niepłynne
2	krótki	średni	długi		niepłynne
3	krótki	długi	średni	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne
4	krótki	średni	średni	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne
5	średni	długi	długi	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne
6	średni	długi	średni	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne
7	średni	średni	długi	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne

8	średni	średni	średni	niepłynne	prawdopodobnie niepłynne
9	krótki	krótki	krótki		płynne
10	krótki	średni	krótki		płynne
11	krótki	krótki	średni		płynne
12	średni	krótki	średni		płynne
13	średni	średni	krótki		płynne
14	średni	krótki	krótki		płynne
15	długi				płynne

Po dokładnej analizie zamieszczonych tu reguł widać, że można je zredukować do trzech, a mianowicie:

$R^{(1)}$: JEZELI S krótki I A długi I B niekrótki TO niepłynne

Jest to wynik połączenia reguł 1 i 2 z tabeli 7.3.

$R^{(2)}$: JEZELI S niedługi I A niekrótki I B niekrótki I sąsiedztwo niepłynne TO prawdopodobnie niepłynne

Jest to wynik połączenia reguł 3-8 z tabeli 7.3

JEZELI B krótki LUB A krótki LUB S długi TO płynne

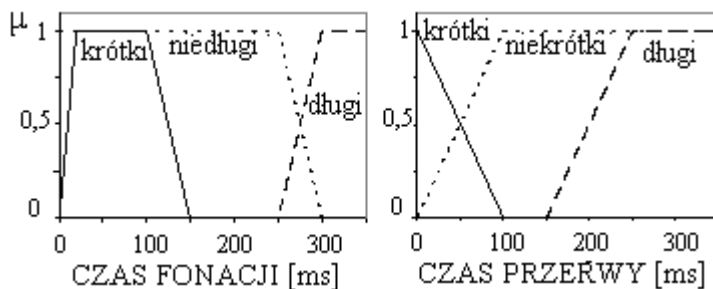
Jest to wynik połączenia reguł 9-15.

Wartość lingwistyczna $S_{\text{niedługi}}$ była określona jako dopełnienie zbioru $S_{\text{długi}}$: $\mu_{S_{\text{niedługi}}} = \mu_{\neg S_{\text{długi}}} = 1 - \mu_{S_{\text{długi}}}$

Wartości lingwistyczne $A_{\text{niekrótki}}$ i $B_{\text{niekrótki}}$ były określone jako dopełnienia zbiorów $B_{\text{krótki}}$ i $A_{\text{krótki}}$ (rys. 7.5).

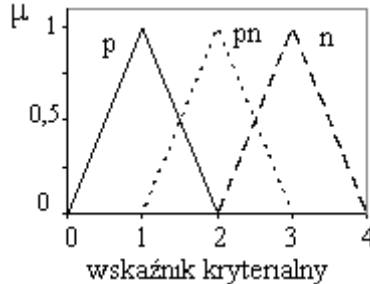
$$\mu_{A_{\text{niekrótki}}} = \mu_{\neg A_{\text{krótki}}} = 1 - \mu_{A_{\text{krótki}}}$$

$$\mu_{B_{\text{niekrótki}}} = \mu_{\neg B_{\text{krótki}}} = 1 - \mu_{B_{\text{krótki}}}$$



Rys. 7.5. Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: krótki, niedługi, długi czas fonacji oraz krótki, niekrótki, długi czas przerwy

Wprowadzono dodatkową zmienną „wskaźnik kryterialny”, której przypisano funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: *płynne*, *prawdopodobnie płynne* i *niepłynne* (rys. 7.6).



Rys. 7.6. Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: *płynne* (p), *prawdopodobnie niepłynne* (pn), *niepłynne* (n).

We wnioskowaniu zastosowano T-normę i S-normę Zadeha oraz implikację Mamdaniego. Uaktywnienie reguły 1 powoduje sprowadza się do obliczenia:

$$\mu_n(j) = \min [\mu_{S_krótki}(j), \mu_{A_długi}(j), \mu_{B_niekrótki}(j)]$$

Uaktywnienie reguły 2 to obliczenie:

$$\mu_{\text{sąsiedztwo niepłynne}}(j) = \mu_{\text{niepłynne}}(j-1)$$

$$\mu_{\text{prawdopodobnie niepłynne}}(j) = \min[\mu_{S_niedługi}(j), \mu_{A_niekrótki}(j), \mu_{B_niekrótki}(j), \mu_{\text{sąsiedztwo niepłynne}}(j)]$$

Rozmyty zbiór *sąsiedztwo niepłynne* to wynik wnioskowania rozmytego dla poprzedniego fragmentu (j-1).

3. Uaktywnienie reguły 3 prowadzi do obliczenia :

$$\mu_p(j) = \max[\mu_{B_krótki}(j), \mu_{A_krótki}(j), \mu_{S_długi}(j)]$$

Na wyjściu otrzymywano trzy zbiory rozmyte, można więc go określić, jako system o wielu wejściach i wielu wyjściach (MIMO porównajmy podrozdział 5.5). Logiczne jest więc zastosowanie metody wyostrażania *center average defuzzification*. Jeśli tak wyznaczona wartość wskaźnika kryterialnego jest większa od 2 program uznaje dany fragment za niepłynną artykulację głósłki zwartej.

Procedura została zweryfikowana na podstawie 150-ciu 4-sekundowych wypowiedzi jedenastu osób jęjąjących się, z czego połowa zawierała niepłynności związane z artykulacją głósłek zwartych, a połowa była płynna. Dokładność identyfikacji niepłynnych fragmentów wynosiła około 95%.

W wypowiedziach płynnych nie stwierdzono pomyłkowych identyfikacji niepłynności.

ROZDZIAŁ 8

MIARY ROZMYTE

8.1. Miary przekonania i domniemania.....	97
8.2. Teoria możliwości.....	99
8.3. Porównanie teorii możliwości i prawdopodobieństwa.....	101
8.4. Stwierdzenia w języku naturalnym a teoria możliwości.....	102
8.5. Redukcja niepewności informacji.....	104

8.1. Miary przekonania i domniemania

Zbiory rozmyte pozwalają na matematyczny opis niepewności wynikającej z niemożliwości wyznaczenia ostrej granicy między obiektami. Taką niepewność określa się również jako niewyraźność (ang. vagueness). Innego rodzaju niepewność, zwana też nieokreślonością (ang. ambiguity) wiąże się z brakiem dostatecznej wiedzy pozwalającej na zaliczenie obiektu do danego zbioru ostrego. Do opisu tego typu niepewności stosowane są miary rozmyte (ang. fuzzy measure). Dla przykładu: przy podziale osób o znanym wzroście na *wysokie* i *niskie* korzystamy ze zbiorów rozmytych. Natomiast w sytuacji, gdy nie znamy wzrostu osoby, a mamy ją zaliczyć do zbioru ostrego *osoby o wzroście od 160 cm do 170 cm*, skorzystamy z miar rozmytych. Pojęcie miara rozmyta zostało wprowadzone przez Sugeno. Może być ona rozumiana, jako stopień przekonania (wiary), że dany element (czy zmienna) należy do wybranego zbioru. Różni się ona zasadniczo od miary probabilistycznej (ang. probability measure), która określa prawdopodobieństwo w przestrzeni zdarzeń. Przede wszystkim miara rozmyta nie jest addytywna w przeciwieństwie do miary probabilistycznej. Wyróżniamy dwie miary rozmyte: miarę przekonania (ang. belief measure) i miarę domniemania (ang. plausibility measure). Są one podstawą teorii Dempstera-Schafera zwanej teorią dowodów (ang. evidence theory).

Miara przekonania $Bel(A)$ może być rozumiana, jako stopień pewności, że dany element należy do zbioru A . Definiuje się ją jako sumę liczb określających prawdopodobieństwa przynależności tego elementu do zbiorów B_k zawierających się w zbiorze A :

$$Bel(A) = \sum_{B_k \subseteq A} m(B_k) \quad (8.1)$$

Miara domniemania $Pl(A)$ jest definiowana jako suma liczb określających prawdopodobieństwa przynależności danego elementu do zbiorów mających niezerową część wspólną ze zbiorem A :

$$Pl(A) = \sum_{B_k \cap A \neq \emptyset} m(B_k) \quad (8.2)$$

Miary: przekonania i domniemania są ze sobą powiązane następującymi zależnościami:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) \quad (8.3)$$

$$Bel(A) = 1 - Pl(\neg A) \quad (8.4)$$

Przykład 8.1

Chory zgłasza się do lekarza z objawami typowymi dla trzech chorób: a , b , c . Zadaniem lekarza jest postawić diagnozę, czyli stwierdzić, czy pacjent należy do zbioru: A (osób chorych na a), B (chorych na b), C (chorych na c). Lekarz stawia diagnozę na podstawie swoich doświadczeń, czyli prawdopodobieństw wystąpienia danego schorzenia przy tych objawach. Występują tu następujące możliwe przyporządkowania do zbiorów A , B , C : $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, oraz

$A \cup B \cup C$. Przykładowe wartości liczb prawdopodobnych i miar rozmytych przedstawiono w tabeli 8.1.

Tabela 8.1. Dane do przykładu 8.1.

zbiór	m	Bel	Pl	Bel \neg	Pl \neg
A	0,04	0,04	0,70	0,96	0,30
B	0,06	0,04	0,85	0,96	0,15
C	0,03	0,03	0,80	0,97	0,20
$A \cup B$	0,10	0,20	0,97	0,80	0,03
$A \cup C$	0,08	0,15	0,94	0,85	0,06
$B \cup C$	0,21	0,30	0,96	0,70	0,04
$A \cup B \cup C$	0,48	1	1	0	0

Jeżeli brana pod uwagę jest opinia dwóch ekspertów, liczby prawdopodobne oblicza się ze wzoru Dempstera- Shafera. Dla zbioru niepustego ($A \neq \emptyset$) stosuje się wzór 8.5. Jeśli A jest zbiorem pustym to $m_{1,2}(A)=0$.

$$m_{1,2}(A) = \frac{\sum_{B_i \cap B_j = A} m_1(B_i) \cdot m_2(B_j)}{1 - \sum_{B_i \cap B_j = \emptyset} m_1(B_i) \cdot m_2(B_j)} \quad (8.5)$$

Przykład 8.2.

Dwóch ekspertów ocenia prawdziwość znalezionej obrazu, podając prawdopodobieństwa, że należy on do zbioru A (oryginał) albo do zbioru B (falszyfikat). Podane przez nich liczby prawdopodobne oraz miary rozmyte przedstawiono w poniższej tabeli.

zbiór	m_1	Bel $_1$	m_2	Bel $_2$	$m_{1,2}$	Bel $_{1,2}$
A	0,1	0,1	0,3	0,3	0,276	0,276
B	0,3	0,3	0,4	0,4	0,517	0,517
$A \cup B$	0,6	1	0,3	1	0,207	1

$$\begin{aligned} m_{1,2}(A) &= \frac{m_1(A) \cdot m_2(A) + m_1(A) \cdot m_2(A \cup B) + m_1(A \cup B) \cdot m_2(A)}{1 - m_1(A) \cdot m_2(B) - m_1(B) \cdot m_2(A)} = \\ &= \frac{0,03 + 0,03 + 0,18}{1 - 0,04 - 0,09} = \frac{0,24}{0,87} \approx 0,276 \end{aligned}$$

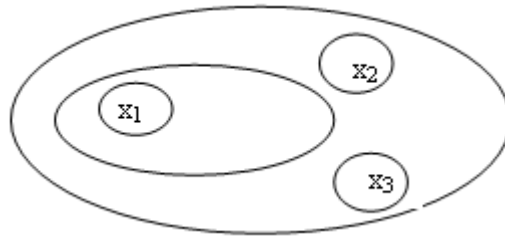
$$m_{1,2}(B) = \frac{m_1(B) \cdot m_2(B) + m_1(B) \cdot m_2(A \cup B) + m_1(A \cup B) \cdot m_2(B)}{1 - m_1(A) \cdot m_2(B) - m_1(B) \cdot m_2(A)} =$$

$$= \frac{0,12 + 0,09 + 0,24}{0,87} = \frac{0,43}{0,87} \approx 0,517$$

$$m_{1,2}(B) = \frac{m_1(A \cup B) \cdot m_2(A \cup B)}{1 - m_1(A) \cdot m_2(B) - m_1(B) \cdot m_2(A)} = \frac{0,18}{0,87} \approx 0,207$$

8.2. Teoria możliwości

Teoria dowodów bazująca na miarach przekonania i domniemania wiąże się z teorią możliwości (ang. possibility theory) dla tzw. zbiorów zagnieżdżonych (ang. nested sets). Grupa zbiorów $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jest nazywana zagnieżdżoną jeśli $A_i \subseteq A_{i+1}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n-1$ (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Zbiory zagnieżdżone

Teoria możliwości została opracowana przez L.A. Zadeha i oparta jest na teorii zbiorów rozmytych. W teorii tej wprowadzono dwie miary: miarę konieczności (ang. necessity measure) oraz miarę możliwości (ang. possibility measure). Miara konieczności ($Nec(A)$) oznacza stopień przekonania o konieczności zajścia zdarzenia A , natomiast miara możliwości ($Poss(A)$) może być interpretowana, jako możliwość zajścia tego zdarzenia. Pomiędzy tymi miarami istnieją następujące związki :

$$Nec(A) = 1 - Poss(\neg A)$$

$$Poss(A) = 1 - Nec(\neg A) \tag{8.6}$$

Można je interpretować następująco: konieczność oznacza brak możliwości istnienia zdarzenia przeciwnego, możliwość brak konieczności zajścia zdarzenia przeciwnego.

Wysoki stopień możliwości zdarzenia A nie oznacza niskiej wartości możliwości, że takie zdarzenie nie zajdzie, również niska wartość konieczności nie implikuje niskiej wartości jej braku tak więc:

$$Poss(A) + Poss(\neg A) \geq 1$$

$$Nec(A) + Nec(\neg A) \leq 1 \tag{8.7}$$

Miary te spełniają następujące warunki:

$$\text{Poss}(A \cup B) = \max [\text{Poss}(A), \text{Poss}(B)] \quad (8.8)$$

$$\text{Nec}(A \cap B) = \min[\text{Nec}(A), \text{Nec}(B)]$$

Miara możliwości ($\text{Poss}(A)$) jest jednoznacznie określona na podstawie funkcji rozkładu możliwości (ang. possibility distribution function) - $r(x)$, która zawiera się w przedziale $[0,1]$. Funkcja $r(x)$ pełni tak ważną rolę w teorii możliwości, jak funkcja rozkładu prawdopodobieństwa w teorii prawdopodobieństwa. Dla zbiorów nieskończonych:

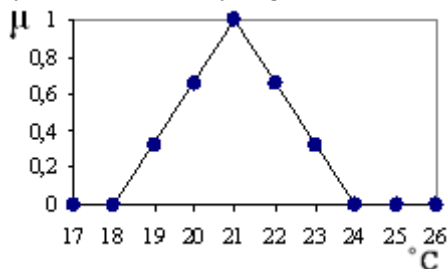
$$\text{Poss}(A) = \sup_{x \in A} r(x) \quad (8.9)$$

W przypadku zbiorów skończonych zamiast funkcji supremum występuje funkcja maksimum.

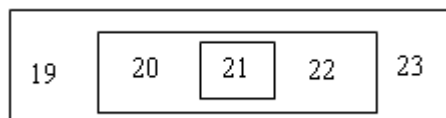
Miary możliwości są określane przy zastosowaniu teorii zbiorów rozmytych. W stwierdzeniu „ x jest A ” funkcja rozkładu możliwości jest równa funkcji przynależności do zbioru A : $r(x) = \mu_A(x)$. Wynika to z faktu, iż zbiory rozmyte również bazują na zbiorach zagnieżdżonych a mianowicie α -przekrojach.

Przykład 8.3

Utwórzmy zbiór rozmyty *temperatura bliska 21°C*. Niech funkcja przynależności do tego zbioru ma kształt funkcji $\Lambda_{18, 21, 24}$. Ograniczmy zbiór temperatur do wartości wyrażonych liczbami naturalnymi (rys. 8.2). Niech funkcja rozkładu możliwości będzie identyczna z funkcją przynależności: $r(x) = \mu(x)$. Możemy tu wyróżnić następujące α -przekroje: $A_1 = \{21\}$, $A_2 = \{20, 21, 22\}$, $A_3 = \{19, 20, 21, 22, 23\}$. Jak widać na rys. 8.3 są to zbiory zagnieżdżone.



Rys. 8.2. Funkcja przynależności do zbioru rozmytego temperatura bliska 21°C oraz zbiór temperatur (punkty)



Rys. 8.3. α -przekroje zbioru rozmytego temperatura bliska 21°C z rys. 8.2

Zgodnie ze wzorem 8.9 $\text{Poss}(A_1) = \text{Poss}(A_2) = \text{Poss}(A_3) = 1$ gdyż jest to supremum funkcji rozkładu. W dopełnieniu do zbioru A_1 mamy temperatury $\{19, 20, 22, 23\}$. Maksimum funkcji rozkładu możliwości dla tych temperatur wynosi $2/3$, a więc $\text{Poss}(\neg A_1) = 2/3$. Dopełnieniem do zbioru A_2 jest zbiór $\{19, 23\}$.

Maksimum funkcji rozkładu jest tu równe $1/3$ a więc $\text{Poss}(\neg A_2) = 1/3$. Analogicznie rozumując widzimy, że $\text{Poss}(\neg A_3) = 0$. Ostatecznie ze wzoru 8.6 obliczamy miary konieczności: $\text{Nec}(A_1) = 1/3$, $\text{Nec}(A_2) = 2/3$, $\text{Nec}(A_3) = 1$.

8.3. Porównanie teorii możliwości z teorią prawdopodobieństwa

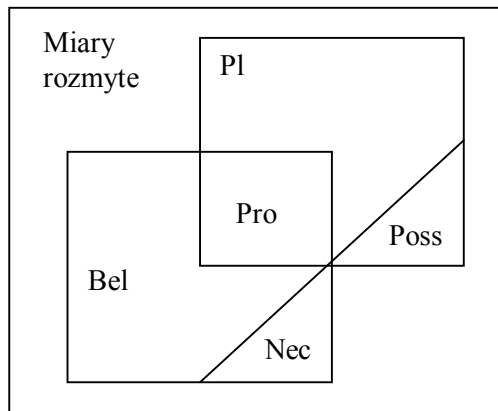
Miara prawdopodobieństwa (Pro) (ang. probability measure) jest, jak wiadomo, określana poprzez stosunek liczby aktualnych zdarzeń do liczby wszystkich zdarzeń. Jest to miara addytywna, co można zapisać następującym wzorem:

$$\text{Pro}(A \cup B) = \text{Pro}(A) + \text{Pro}(B) \quad \text{dla } A \cap B = \emptyset \quad (8.10)$$

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową wartości należących do zbioru A możemy wyznaczyć na podstawie funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $p(x)$:

$$\text{Pro}(A) = \sum_{x \in A} p(x) \quad (8.11)$$

Dla zbiorów zamkniętych funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest równa liczbom prawdopodobnym $m(x)$ (porównamy podrozdział 8.1 i wyznaczanie miar przekonania i domniemania). Miara przekonania ($\text{Bel}(A)$) staje się miarą prawdopodobieństwa jeśli przestrzeń zdarzeń jest zbiorem singletonów. Na rys. 8.4 przedstawiono związki pomiędzy opisanymi typami miar.



Rys. 8.4. Związek pomiędzy opisanymi miarami rozmytymi

Porównując teorię prawdopodobieństwa z teorią możliwości łatwo zauważyć, że mała wartość prawdopodobieństwa nie wymusza małej wartości możliwości i odwrotnie. Rozkład możliwości podobnie jak rozkład prawdopodobieństwa sumuje się do 1. Zdarzenie niemożliwe jest jednocześnie nieprawdopodobne. Porównanie teorii możliwości z teorią prawdopodobieństwa zamieszczono w tabeli 8.2.

Tabela 8.2. Porównanie teorii prawdopodobieństwa i teorii możliwości

Teoria prawdopodobieństwa	Teoria możliwości
Bazuje na mierze jednego rodzaju: prawdopodobieństwa (Pro)	Bazuje na dwu miarach: możliwości (Poss) i konieczności (Nec)
Obszar odniesienia składa się z singletonów	Obszar odniesienia składa się z zagnieżdżonych podzbiorów
Jednoznaczna reprezentacja Pro przez funkcję rozkładu prawdopodobieństwa $p(x)$	Jednoznaczna reprezentacja Poss przez funkcję rozkładu możliwości $r(x)$
Normalizacja $\sum_{x \in X} p(x) = 1$	Normalizacja $\max r(x) = 1$
Addytywność $Pro(A \cup B) = Pro(A) + Pro(B) - Pro(A \cap B)$	Reguły max/min $Poss(A \cup B) = \max[Poss(A), Poss(B)]$ $Nec(A \cap B) = \min[Nec(A), Nec(B)]$
_____	$Nec(a) = 1 - Poss(\neg A)$ $Poss(A) < 1 \Rightarrow Nec(A) = 0$ $Nec(A) > 0 \Rightarrow Poss(A) = 1$
$Pro(A) + Pro(\neg A) = 1$	$Poss(A) + Poss(\neg A) \geq 1$ $Nec(A) + Nec(\neg A) \leq 1$ $\max[Poss(A), Poss(\neg A)] = 1$ $\min[Nec(A), Nec(\neg A)] = 0$
$p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$	$r(x, y) = \min[r_x(x), r_y(y)]$

8.4. Stwierdzenia w języku naturalnym a teoria możliwości

Rozkłady możliwości stosowane są do stwierdzeń w języku naturalnym Dla przykładu mówiąc „pan Jan jest w średnim wieku” określamy możliwość, zaliczenia go do osób w średnim wieku. Stwierdzenia proste tego typu, które można ogólnie zapisać jako „x jest A” są modelowane funkcjami przynależności elementu x do zbioru rozmytego A. Przy wykorzystaniu teorii możliwości są modelowane również inne stwierdzenia języka naturalnego, a mianowicie:

a) Stwierdzenia, w których występują modyfikatory: *bardzo, lekko, całkiem mniej więcej, nie itd.* Dla przykładu stwierdzamy: *owoce są bardzo tanie, lekko podwyższona temperatura ciała, całkiem sprawny człowiek, mniej więcej równe dochody, nietatwe zadanie itd.* Do modelowania stwierdzeń typu: *bardzo, lekko, całkiem, mniej więcej* stosowane są modyfikatory potęgowe lub modyfikatory koncentracji i rozcieńczenia opisane w rozdziale 1. Modyfikator *nie* powstaje w wyniku standardowej negacji.

b) Stwierdzenia z łącznikami „I”, „LUB”, „TO”, np.: *duży i tani samochód, duże mieszkanie lub mały dom, jeżeli prędkość samochodu jest duża to zużycie paliwa jest duże itp.* Stwierdzeniom koniunkcyjnym (z łącznikiem I), jak wiadomo (rozdział 2) odpowiadają w teorii zbiorów rozmytych operatory t-norm, alternatywnym (LUB) s-norm. Stwierdzenia warunkowe (TO) są modelowane implikatorami opisanymi w rozdziale 5.

c) Stwierdzenia z kwantyfikatorami: *kilka, większość, nieliczne, prawie itp., np.: kilka tanich książek, większość ludzi młodych, nieliczne chore drzewa, prawie wszystkie owoce, nieliczne osoby itp.*

Reprezentacją tego typu stwierdzeń jest liczebność lub moc (ang cardinality) zbioru rozmytego (Card(A)):

$$Card(A) = \sum_{\{i|x_i \in Supp(A)\}} \mu_A(x_i) \quad (8.12)$$

d) Stwierdzenia z kwalifikatorami, jak np.: *mało prawdziwe, mało prawdopodobne, nie bardzo możliwe itp.* Dla pierwszego typu stwierdzeń należy określić stopień prawdy definiując zbiór rozmyty T (ang. truth). Ogólna forma stwierdzenia będzie następująca: „x jest A jest T”. Przykładem takiego typu sformułowania jest na przykład zdanie: „twierdzenie, że rata kredytu jest niska jest mało prawdziwe”. Funkcja przynależności do zbioru T określa stopień prawdy stwierdzenia „x jest A”. Zauważmy przy tym, że A jest zbiorem rozmytym o określonej funkcji przynależności $\mu_A(x)$. Porównajmy dwa rodzaje stwierdzeń: „rata kredytu jest niska” oraz „jest pewne w 70-ciu procentach, że rata kredytu jest niska”. W pierwszym zdaniu funkcja przynależności do zbioru *prawda* jest równa 1, gdyż stwierdzamy z całą pewnością, że rata jest niska.

W drugim przypadku stopień prawdziwości pierwszej części zadania wynosi 0,7. Stwierdzenia zawierające słowa typu *prawdopodobne*, np.: „jest mało prawdopodobne, że czynsz jest niski” wymagają określenia prawdopodobieństwa zdarzenia rozmytego. Prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego można przedstawić wzorem:

$$P\{x \text{ jest } A\} = \int_X \mu_A(x)p(x)dx \quad (8.13)$$

gdzie $p(x)$ funkcja rozkładu prawdopodobieństwa.

Dla dyskretnej przestrzeni zdarzeń:

$$P\{x \text{ jest } A\} = \sum_i \mu_A(x_i)p(x_i) \quad (8.14)$$

Dla zilustrowania tego wzoru przeanalizujemy następujący przykład.

Przykład 8.4.

Przypuśćmy, że losujemy jedną z dziesięciu liczb ze zbioru [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej wynosi 1/10 (rozkład funkcji prawdopodobieństwa jest równomierny). Określmy zbiór rozmyty: *małe liczby* $A = 1/1 + 0,8/2 + 0,6/3 + 0,4/4 + 0,2/5$ i wyznaczmy prawdopodobieństwo wylosowania małej liczby. Zgodnie ze wzorem 8.14 będzie ono równe:

$$P\{x \text{ jest małe}\} = 1 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,3$$

Jeśli w stwierdzeniu lingwistycznym występuje słowo *możliwe* posługujemy się

rozkładem możliwości.

8.5. Redukcja niepewności informacji

Pojęcie informacji jest nierozdzielnie związane z pojęciem niepewności, gdyż w wielu rozwiązaniach problemów informacja może być niekompletna, nieprecyzyjna, fragmentaryczna, niewyraźna, sprzeczna lub niepewna z innych powodów. Możemy rozróżnić trzy rodzaje niepewności: 1) niedokładność (ang. imprecision, nonspecificity), która wynika z wielkości zbiorów lub możliwości, 2) sprzeczność (ang. discord) pomiędzy zbiorami lub możliwościami, 3) rozmycie lub niewyraźność (ang. fuzziness), które wynika z nieostrych granic między zbiorami. Nieprecyzyjność zbiorów ostrych jest określona tak zwaną funkcją Hartley'a:

$$U(A) = \log_2 |A| \quad (8.15)$$

gdzie $|A|$ oznacza moc (wielkość) zbioru niepustego A .

Uogólnieniem funkcji Hartley'a dla zbiorów rozmytych jest funkcja:

$$U(A) = \frac{1}{h(A)} \int_0^{h(A)} \log_2 |{}^\alpha A| d\alpha \quad (8.16)$$

$|{}^\alpha A|$ jest mocą α -przekroju zbioru rozmytego A , natomiast $h(A)$ jego wysokością.

Miarą niepewności w teorii prawdopodobieństwa jest entropia Shannona $H(m)$:

$$H(m) = - \sum_{x \in X} m(x) \log_2 m(x) \quad (8.17)$$

gdzie $m(x)$ jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa.

Typem niepewności, dotyczącym tylko zbiorów rozmytych jest rozmytość. Funkcja $f(A)$ będąca miarą rozmytości zbioru A powinna spełniać następujące warunki:

1. $f(A) = 0$, jeśli A jest zbiorem ostrym.
2. $f(A)$ osiąga wartość maksymalną, jeśli $\mu_A(x) = 0,5$ dla wszystkich $x \in X$, co oznacza maksymalne rozmycie.
3. $f(A) \leq f(B)$ co oznacza, że zbiór A jest ostrzejszy od zbioru B , jeśli $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla $\mu_B(x) \leq 0,5$ oraz $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ dla $\mu_B(x) \geq 0,5$.

Jest kilka miar rozmytości. Jednym ze sposobów jest pomiar odległości pomiędzy zbiorem rozmytym A i jego dopełnieniem. Podstawowe definicje odległości między zbiorami rozmytymi A, B są następujące:

Odległość liniowa Hamminga:

$$d(A, B) = \sum_{n=1}^N |\mu_A(x_n) - \mu_B(x_n)| \quad (8.18)$$

Unormowana odległość Hamminga:

$$d(A, B) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\mu_A(x_n) - \mu_B(x_n)| \quad (8.19)$$

Odległość euklidesowa kwadratowa:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{n=1}^N [\mu_A(x_n) - \mu_B(x_n)]^2} \quad (8.20)$$

Unormowana odległość kwadratowa:

$$e(A, B) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N [\mu_A(x_n) - \mu_B(x_n)]^2} \quad (8.21)$$

Przy zastosowaniu standardowej definicji dopełnienia i odległości Hamminga rozmycie zbioru A może być wyznaczone ze wzoru:

$$f(A) = \sum_{n=1}^N |\mu_A(x_n) - [1 - \mu_A(x_n)]| = \sum_{n=1}^N |2\mu_A(x_n) - 1| \quad (8.22)$$

W teorii dowodów miara rozmytości $F(m)$ jest średnią ważoną rozmycia poszczególnych zbiorów z przestrzeni F :

$$F(m) = \sum_{A \in F} m(A) f(A) \quad (8.23)$$

ROZDZIAŁ 9

ROZMYTE BAZY DANYCH

9.1. Rozmyte relacyjne bazy danych	107
9.2. Zastosowanie zbiorów rozmytych w modelu związków encji.....	109
9.3. Zapytania nieprecyzyjne.....	110
9.4. Praktyczne realizacje systemów zapytań nieprecyzyjnych.....	112
9.5. Rozmyte obiektowe bazy danych.....	113

9.1. Rozmyte relacyjne bazy danych

Czasy współczesne charakteryzuje duże i ciągle zwiększające się zapotrzebowanie na gromadzenie oraz wyszukiwanie informacji. Stąd duże zainteresowanie tworzeniem i użytkowaniem baz danych. Stosowane systemy bazodanowe są przeznaczone do gromadzenia i przetwarzania danych precyzyjnych nie zawsze spełniają, więc, oczekiwania użytkownika, który często w swojej działalności korzysta z danych nie dających się opisać w sposób ścisły. Dla przykładu będzie miał trudności lekarz stawiający diagnozę z pewnym stopniem niepewności przy zapisie tej informacji do bazy danych, czy wyszukujący w niej podobnych przypadków. Dlatego interesujące jest zastosowanie teorii zbiorów rozmytych w bazach danych. W popularnym relacyjnym modelu danych stosowane są rozmyte relacje (opisane w rozdziale 3), po rozszerzeniu ich definicji na pojęcia stosowane w tego typu bazach. Jak wiadomo relacje są formalizacją tabel, których kolumnom i wierszom odpowiadają atrybuty i krotki. Relację rozmytą określa się jako zbiór rozmyty utworzony na iloczynnie kartezyjańskim jej atrybutów. Każdej krotce przypisywany jest stopień przynależności do danej relacji.

Przykład 9.1

W tabeli przedstawiono przykład relacji rozmytej *duże_obroty* dla bazy danych firmy prowadzącej sieć sklepów:

Tabela 9.1. Przykładowa relacja rozmyta „*duże_obroty*”

S#	Nazwa	Obrót	Asortyment	Miasto	μ
S1	Alik	120000	odzież	Łódź	0,8
S2	Bufo	60000	spożywczy	Poznań	0,5
S3	Top	250000	odzież	Kraków	1
S4	Zuch	40000	sportowy	Łódź	0,4
S5	Aster	190000	spożywczy	Kraków	0,9

Operacje na relacyjnych bazach rozmytych są rozszerzeniem klasycznych operacji na relacjach rozmytych. Jeżeli mamy dwie relacje rozmyte o tych samych schematach P i S to ich sumą jest relacja rozmyta zawierająca krotki należące do relacji P lub S, przy czym stopień przynależności danej krotki t jest obliczany jako maksimum funkcji przynależności do relacji P i S [17].

$$\mu_{P \cup S}(t) = \max [\mu_P(t), \mu_S(t)] \quad (9.1)$$

Iloczyn zawiera tylko krotki należące do obu relacji P i S, a ich funkcja przynależności jest obliczana ze wzoru:

$$\mu_{P \cap S}(t) = \min [\mu_P(t), \mu_S(t)] \quad (9.2)$$

Różnica P - S zawiera krotki relacji P z funkcją przynależności obliczaną według wzoru:

$$\mu_{P - S}(t) = \min \{ \mu_P(t), [1 - \mu_S(t)] \} \quad (9.3)$$

Na rys. 9.1 przedstawiono sumę, iloczyn i różnicę relacji rozmytych.

P			S		
A	O	μ	A	O	μ
a ₁	o ₁	1	a ₁	o ₁	0,5
a ₂	o ₁	0,4	a ₁	o ₂	0,4
a ₂	o ₂	0,6	a ₂	o ₂	0,3
a ₃	o ₂	0,7	a ₁	o ₃	0,7

P ∪ S		
A	O	μ
a ₁	o ₁	1
a ₁	o ₂	0,4
a ₁	o ₃	0,7
a ₂	o ₁	0,4
a ₂	o ₂	0,6
a ₃	o ₂	0,7

P ∩ S		
A	O	μ
a ₁	o ₁	0,5
a ₂	o ₂	0,3

P - S		
A	O	μ
a ₁	o ₁	0,5
a ₂	o ₁	0,4
a ₂	o ₂	0,6
a ₃	o ₂	0,7

Rys. 9.1. Suma, iloczyn i różnica relacji rozmytych

Wynikiem selekcji jest relacja o takim samym schemacie. Warunkiem selekcji jest określony przez użytkownika stopień przynależności krotki.

Podobnie jak w klasycznych bazach możliwa jest projekcja relacji R na dany zbiór atrybutów X ($Proj_X(R)$). Wartość stopnia przynależności dla krotki t w relacji wynikowej jest równa największej wartości w odpowiednich krotkach odpowiadających temu samemu atrybutowi.

$$\mu_{Proj_X}(t) = \sup_{T(X)=t(X)} \mu_R(T) \quad (9.4)$$

Przykład 9.2.

W poniższej tabeli przedstawiono wynik projekcji relacji *duże_obroty* z przykładu 9.1 na zbiór $X = \{\text{asortyment}\}$.

Asortyment	μ
odzież	1
spożywczy	0,9
sportowy	0,4

Stosowanym działaniem jest również naturalne złączenie relacji. Złączeniem dwu relacji P(A, O) i R(O, B) jest relacja $P * R$ o schemacie {A, O, B}, w której stopnie przynależności krotek są wyznaczane ze wzoru:

$$\mu_{P*R}(t) = \min[\mu_P(p), \mu_R(r)] \quad (9.5)$$

We wzorze 9.4 p i r są krotkami relacji P i R przy czym p = t(A, O) oraz r = t(O, B). Złączenie relacji zostało przedstawione na rys. 9.2.

P		
A	O	μ
a ₁	o ₁	1
a ₂	o ₁	0,4
a ₂	o ₂	0,6
a ₃	o ₂	0,7

R		
O	B	μ
o ₁	b ₁	0,3
o ₂	b ₁	0,8
o ₂	b ₂	0,9
o ₃	b ₂	0,1

P * R			
A	O	B	μ
a ₁	o ₁	b ₁	0,3
a ₂	o ₁	b ₁	0,3
a ₂	o ₂	b ₁	0,6
a ₂	o ₂	b ₂	0,6
a ₃	o ₂	b ₁	0,7
a ₃	o ₂	b ₂	0,7

Rys. 9.2. Złączenie relacji P i R

W celu określenia w jakim stopniu wymagania zawarte w relacji P są uwzględnione w relacji S stosuje się iloraz $P \div S$. Wyznaczenie ilorazu przebiega według następującego algorytmu:

1. Z relacji P(a, o) wybieramy krotki o tych wartościach a, dla których istnieją wszystkie krotki o z relacji S(o).
2. Jeśli dla każdej wartości o w relacji S istnieje krotka w P(a, o), dla której funkcja przynależności $\mu_S(o) \leq \mu_P(a, o)$, to wybieramy najmniejszą wartość stopnia przynależności dla krotki a.
3. W przypadku przeciwnym stosujemy wzór z zastosowaniem implikatora Gödela I_G (opisany w rozdziale 5.4 wzór 5.9):

$$\mu_{P \div S}(a) = \min_b I_G(\mu_S(o), \mu_P(a, o))$$

Na rys. 9.3 przedstawiono wynik dzielenia przykładowych relacji P przez S.

P		
A	O	μ
a ₁	o ₁	1
a ₁	o ₂	0,4
a ₁	o ₃	0,7
a ₂	o ₁	0,2
a ₂	o ₂	1
a ₂	o ₃	0,7
a ₃	o ₂	0,4

S	
O	μ
o ₁	0,5
o ₂	0,4
o ₃	0,7

P ÷ S	
A	μ
a ₁	0,4
a ₂	0,2

Rys. 9.3. Dzielenie relacji P przez S

9.2. Zastosowanie zbiorów rozmytych w modelu związków encji

Zastosowanie zbiorów rozmytych jest możliwe na wszystkich poziomach tworzenia modelu związków encji. Poziom pierwszy obejmuje elementy modelu czyli typy encji, związków i atrybutów. Jeżeli oznaczymy przez D_E zbiór branych pod uwagę typów encji, D_R możliwe typy związków między elementami, D_A –

zbiór typów atrybutów, to każdy z tych elementów można definiować następująco:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \{\mu_{\tilde{E}}(E)/E : E \in D_E, \mu_{\tilde{E}} : D_E \rightarrow [0,1]\} \\ \tilde{R} &= \{\mu_{\tilde{R}}(R)/R : R \in D_R, \mu_{\tilde{R}} : D_R \rightarrow [0,1]\} \\ \tilde{A} &= \{\mu_{\tilde{A}}(A)/A : A \in D_A, \mu_{\tilde{A}} : D_A \rightarrow [0,1]\}\end{aligned}\quad (9.6)$$

Przy pomocy zbiorów rozmytych można więc projektować modele przy braku pewności dotyczącej zbiorów encji, doboru atrybutów oraz związków między atrybutami.

Następne niepewności dotyczą wartości typów zdefiniowanych na poziomie pierwszym, a mianowicie klasyfikowania encji i określania „siły” powiązań między nimi. Trzeci poziom niepewności jest związany z atrybutami. Przy ocenie stopnia klasyfikacji do zbioru encji na podstawie atrybutu stosowane są miary możliwości (Nec) i konieczności (opisane w rozdziale 8).

9.3. Zapytania nieprecyzyjne

Odrębnym problemem jest wyszukiwanie informacji w klasycznych bazach danych w oparciu o zapytania zawierające nieprecyzyjne określenie zakresu i warunków, jakie powinny spełniać poszukiwane dane. Cechą klasycznych języków zapytań jest wymóg, by warunki, jakie mają spełniać poszukiwane dane były określone w sposób precyzyjny. Bardzo często wymagania te są trudne do spełnienia. Jeśli dla przykładu klient chce znaleźć w ofercie sklepu komputery w cenie *około 3000 zł*, musi podać zakres interesujących go cen. Każdy komputer o cenie różniącej się tylko o 1 zł od granicznych podanych wartości nie zostanie wyszukany. Dlatego też rozwijana jest koncepcja zapytań nieprecyzyjnych w oparciu o logikę rozmytą. W takich zapytaniach występują wyrażenie języka naturalnego, zwane terminami lingwistycznymi, określające nieprecyzyjne wartości np.: niska cena, nieprecyzyjne porównania np.: znacznie większe niż 3000 oraz niestandardowe sposoby agregacji warunków, np.: większość podanych warunków ma być spełniona. Podstawową zaletą zapytań nieprecyzyjnych, wynikającą z zastosowania języka naturalnego, jest możliwość płynnego przechodzenia od spełnienia do niespełnienia warunków. Na przykład *normalne ciśnienie krwi* nie przestaje być normalne przy niewielkim jego wzroście. Oczywiście wraz z jego wzrostem staje się ono coraz mniej normalne, co może być określone poprzez wartość funkcji przynależności do zbioru rozmytego *normalne ciśnienie krwi*. Wartość ta jest określana, jako stopień spełnienia zapytania nieprecyzyjnego. Jeśli tworzymy zapytania złożone, stopnie spełnienia dla poszczególnych warunków agreguje się przy wykorzystaniu wybranych operatorów (opisanych w rozdziałach 2 i 5). Zapytania nieprecyzyjne stwarzają możliwość uporządkowania wyników według stopnia spełnienia, dzięki czemu ich analiza staje się łatwiejsza. Przy tego typu zapytaniach zmniejsza się także liczba odpowiedzi pustych, czyli nie spełniających wymagań zawartych w zapytaniu. Wynikiem zapytania nieprecyzyjnego jest zbiór uporządkowany

według stopnia spełnienia zapytania. Gramatyka zapytań nieprecyzyjnych jest związana z językiem zapytań konkretnej bazy danych. Na ogół zawiera ona następujące terminy lingwistyczne:

- a) liczbowe wartości rozmyte;
- b) modyfikatory;
- c) rozmyte operatory porównania;
- d) nieliczbowe wartości rozmyte;
- e) kwantyfikatory lingwistyczne.

Ad a) Liczbowe wartości rozmyte mogą być reprezentowane przy wykorzystaniu liczb rozmytych. W opisanym w następnym podrozdziale systemie FQUERY stosuje się liczby rozmyte o trapezoidalnych funkcjach przynależności. Liczbowe wartości rozmyte używane są w zapytaniach przy określaniu ograniczeń dotyczących kolumn (atrybutów). Ponieważ interpretacja ich wartości i kształtów funkcji przynależności może być inna dla każdego użytkownika, pożądane jest takie opracowane aplikacje, aby osoba korzystająca z niej miała możliwość zdefiniowania własnej funkcji przynależności do zbioru rozmytego odpowiadającego danemu terminowi lingwistycznemu. Np. przy wyszukiwaniu *dużego domu* użytkownik powinien mieć możliwość dostosowania funkcji przynależności do zbioru rozmytego *duży*.

Ad b) Wartości zmiennej lingwistycznej mogą być modyfikowane poprzez użycie określeń: *bardzo*, *raczej*, *całkiem*, *mniej więcej* itp. Stosowane są w tym celu modyfikatory: koncentracji, rozcieńczenia, wzmocnienia kontrastu i zmniejszenia kontrastu opisane w rozdziale 1. Do stosowanych w zapytaniach nieprecyzyjnych modyfikatorów należą też modyfikatory przesunięcia, zachowujące kształt funkcji przynależności przy zmianie nośnika zbioru rozmytego.

Ad c) Przykładem zastosowania rozmytego operatora porównania jest następujący warunek „cena dużo mniejsza niż 200000”. Rozmyty warunek porównania jest reprezentowany przez relację rozmytą określoną na iloczynie kartezjańskim dziedzin porównywanych wartości.

Ad d) Przykładem użycia nieliczbowej wartości rozmytej jest warunek „*dobra lokalizacja domu*”. Wymaga określenia stopnia przynależności do zbioru rozmytego *dobra lokalizacja*. Jest on subiektywny i dlatego konieczna jest możliwość definiowania jej przez użytkownika.

Ad e) Kwantyfikator w klasycznej logice matematycznej jest terminem oznaczającym zwroty: *każdy*, *dla każdego*, *istnieje*, *dla pewnego*. W teorii zbiorów rozmytych wprowadzono pojęcie *kwantyfikator lingwistyczny*, który jest reprezentowany przez liczbę rozmytą. Dzieli się je na dwie grupy:

- bezwzględne np.: *mniej więcej 100*, *około 300*, *znacznie więcej niż 50*, *co najmniej 10* itp.

-względne np.: *większość*, *niewiele*, *prawie wszystkie*, określające stosunek liczebności zbioru o danej własności do liczebności całego zbioru.

Realizacja zapytania nieprecyzyjnego jest realizowana według następującego algorytmu:

1. Pobranie wiersza z tabeli.

2. Obliczenie cząstkowych stopni spełnienia warunków dla wartości atrybutów z bieżącego wiersza.
3. Agregacja cząstkowych stopni spełnienia.
4. Jeśli całkowity stopień spełnienia przekracza wartość progową podaną przez użytkownika lub przyjętą domyślnie, wiersz jest dołączany wraz ze stopniem spełnienia.
5. Jeśli nie ma więcej wierszy koniec przeszukiwania, jeśli nie przechodzi do punktu 1.

9.4. Praktyczne realizacje systemów zapytań nieprecyzyjnych

Popularnym językiem zapytań jest SQL. Rozszerzenie tego języka o zapytania nieprecyzyjne pod nazwą SQLf opracował zespół Patrica Bosca. Jak wiadomo w instrukcji wyszukiwania w SQL znaczenie podstawowe ma następująca konstrukcja (ang. select block):

```
SELECT  lista wyrażeń
FROM    lista tabel
WHERE   warunek
```

Zasadnicze rozszerzenie składni SQLf dotyczy frazy WHERE, w której dodano możliwość używania terminów lingwistycznych. W wierszach wynikowych podawany jest stopień spełnienia obliczany według algorytmu opisanego w poprzednim podrozdziale. W języku SQLf proste warunki ze spójnikami „AND” „OR” są interpretowane przy wykorzystaniu funkcji maksimum i minimum dla zbiorów rozmytych. Jest możliwość używania modyfikatorów np.: *bardzo*. Fraza SELECT w SQLf ma postać następującą:

```
SELECT [liczba całkowita | liczba rzeczywista]
       [UNIQUE | UNIMIN | UNIAVG]
```

Liczba całkowita oznacza ile wierszy o najwyższym stopniu spełnienia chce wybrać użytkownik, liczba rzeczywista oznacza progową wartość stopnia spełnienia dla wierszy, które zostaną wybrane. Słowa kluczowe UNIQUE, UNIMIN, UNIAVG powodują pozostawienie jednego spośród identycznych wierszy o: najwyższym, najniższym i średnim stopniu spełnienia. W wyrażeniu grupujących GROUP BY nie stosuje się elementów rozmytych natomiast we frazie HAVING są one stosowane, tak jak w przypadku WHERE. Ciekawe rozwiązanie zostało zaproponowane przez autorów języka dla zapytań pochodnych. Jest ono realizowane według następującego schematu. W kroku pierwszym warunki rozmyte są zastępowane nierozmytymi warunkami pochodnymi. Następnie tak uzyskane zapytanie wstawiane jest w miejsce oryginalnej tabeli we frazie FROM i wykonywane zapytanie nieprecyzyjne.

Oryginalną implementacją jest system zapytań nieprecyzyjnych opracowany przez Kacprzyka i Zadroznego pod nazwa FQUERY. Pierwsze jego wersje opracowane były dla baz danych XBase. Ostatnia wersja - FQUERY for Access stanowi dodatek do bazy danych MS Access. W tym systemie w przeciwieństwie do języka SQLf istnieje możliwość określania i modyfikacji terminów

lingwistycznych. Użytkownik może wybrać termin lingwistyczny ze słownika, zmieniać jego nazwę oraz funkcje przynależności do odpowiednich wartości rozmytych odpowiadających danemu atrybutowi. Ma także możliwość definiowania rozmytych operatorów porównania oraz wyboru i definiowania kwantyfikatorów lingwistycznych. Zapytania nieprecyzyjne można wykonywać przy zastosowaniu standardowych poleceń MS Access.

9.5. Rozmyte obiektowe bazy danych

W modelach rozmytych obiektowych baz danych stosowane są obiekty rozmyte, klasy i podklasy rozmyte, a także rozmyte dziedziczenie. Rozmytym obiektem nazywany jest obiekt z co najmniej jednym atrybutem o rozmytych wartościach. Rozmycie klas może mieć dwojaki charakter. Niektóre obiekty mogą należeć do danej klasy z określonym stopniem przynależności. Mogą też charakteryzować się rozmytą domeną atrybutu. Możliwe jest również rozmyte dziedziczenie z określonym stopniem pewności.

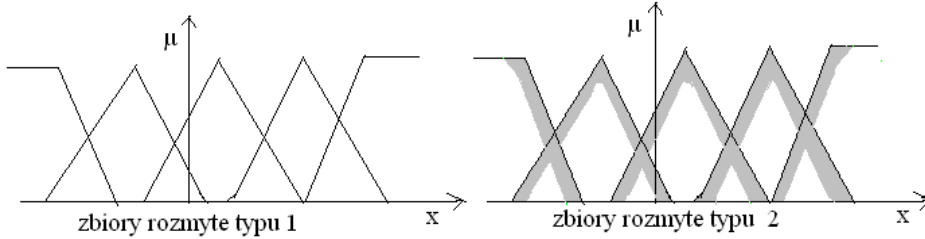
ROZDZIAŁ 10

ZBIORY ROZMYTE TYPU 2

10.1. Definicje i własności zbiorów rozmytych typu 2.....	115
10.2. Operacje na zbiorach rozmytych typu 2.....	117
10.3. Relacje rozmyte typu 2.....	119
10.4. Redukcja typu.....	120
10.5. Systemy rozmyte typu 2.....	121

10. 1. Definicje i własności zbiorów rozmytych typu 2

W poprzednich rozdziałach opisywano zbiory rozmyte, w których nośnik był rozmyty, natomiast funkcje przynależności były liczbami rzeczywistymi z przedziału $[0, 1]$. Są one nazywane zbiorami typu 1, dla odróżnienia od zbiorów rozmytych typu 2, których funkcje przynależności są również rozmyte (rys. 10.1).



Rys. 10.1 Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych typu 1 i typu 2

Zbiór rozmyty typu 2 jest definiowany, jako zbiór par $\{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ przy czym x podobnie jak w przypadku zbiorów rozmytych typu 1 jest elementem tego zbioru, natomiast $\mu_{\tilde{A}}(x)$ jest zbiorem rozmytym typu 1 określonym na uniwersum J_x należącym do przedziału $[0,1]$, co można zapisać [18]:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x} f_x(u) / u \quad (10.1)$$

Przedział J_x stanowi dziedzinę funkcji $f_x(u)$ i nosi nazwę podstawowej przynależności elementów x . Funkcja $f_x(u)$ nazywana jest *funkcją drugorzędnej przynależności*, a jej wartość *stopniem drugorzędnej przynależności* lub w skrócie *drugorzędną przynależnością*.

Dla zbiorów dyskretnych wzór 10.1 przyjmuje postać:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = f_1(u_1) / u_1 + f_2(u_2) / u_2 + \dots + f_m(u_m) / u_m = \sum_{u \in J_x} f_x(u) / u \quad (10.2)$$

Przykład 10.1

Niech przestrzeń $X = \{2, 5, 7\}$, $J_{x1} = \{0,2; 0,3; 0,8\}$, $J_{x2} = \{0,4; 1\}$, $J_{x3} = \{0,2; 0,6; 0,9\}$. Utwórzmy zbiór rozmyty typu 2 na uniwersum X przypisując dowolne stopnie przynależności drugorzędnej wartościom ze zbiorów J_{x1} , J_{x2} , J_{x3} .

$$\tilde{A} = (0,1 / 0,2 + 1/0,3 + 0,3/0,8) / 2 + (1/0,4 + 0,2/1) / 5 + (0,5/0,2 + 1/0,6 + 0,4/0,9) / 7$$

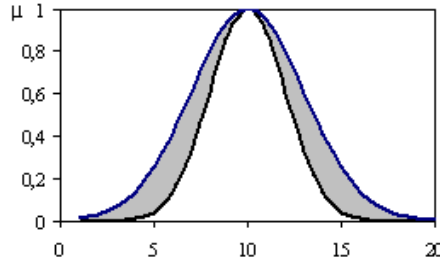
Jeżeli funkcja drugorzędnej przynależności przyjmuje wartość 1 tylko dla jednego elementu u z danej dziedziny J_x , to suma standardowa elementów u tworzy tzw. *funkcję głównej przynależności*. Powstały zbiór rozmyty A_g jest typu 1.

Przykład 10.2

Utwórzmy zbiór A_g ze zbioru rozmytego typu 2 utworzonego w przykładzie 10.1. Otrzymamy zbiór rozmyty: $A_g = 0,3 / 2 + 0,4 / 5 + 0,6 / 7$.

Obszar składający się ze wszystkich punktów podstawowej przynależności jest nazywany *śladem niepewności* (SN, wzór 10.3, rys. 10.2).

$$SN(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (10.3)$$



Rys. 10.2. Ślad niepewności zbioru rozmytego typu 2

W danym zbiorze rozmytym typu 2 można wyróżnić nieprzeliczalną liczbę tzw. *osadzonych zbiorów rozmytych* (\tilde{A}_o). Są to zbiory o funkcji drugorzędnej przynależności wyznaczonej dla jednego elementu $\Theta \in J_x$.

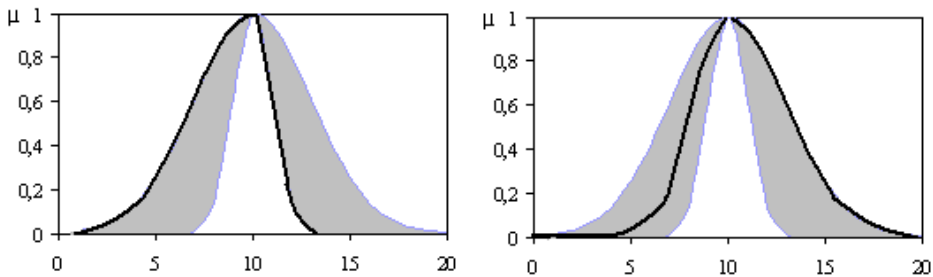
$$\tilde{A}_o = \int_{x \in X} [f_x(\Theta) / \Theta] / x \quad (10.4)$$

Zbiór osadzony dyskretny jest zdefiniowany wzorem 10.5.

$$\tilde{A}_o = \sum_{i=1}^n [f_{x_i}(\Theta_i) / \Theta_i] / x_i \quad (10.5)$$

Każdemu osadzonemu zbiorowi typu 2 odpowiada zbiór osadzony typu 1 (A_o) o stopniach przynależności równych wybranym elementom Θ (wzory 10.6 dla zbiorów ciągłych dla dyskretnych). Przykłady dwu zbiorów osadzonych typu 1 (funkcje przynależności - linie pogrubione) przedstawia rys. 10.3.

$$A_o = \int_{x \in X} \Theta / x \quad A_o = \sum_{i=1}^n \Theta_i / x_i \quad (10.6)$$



Rys. 10.3. Wybrane osadzone zbiory rozmyte typu 1 (funkcje przynależności - linie pogrubione)

10.2. Operacje na zbiorach rozmytych typu 2

Na zbiorach rozmytych typu 2 wykonuje się operacje właściwe dla zbiorów typu 1, jakkolwiek stopień skomplikowania jest dużo większy. Podstawowe działania zostaną zdefiniowane dla dwóch zbiorów rozmytych typu 2 o następujących funkcjach przynależności

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / u \quad (10.7)$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \int_{v \in J_x^v} g_x(v) / v \quad (10.8)$$

Zostały one określone na tym samym uniwersum X , natomiast mają różne funkcje podstawowej i drugorzędnej przynależności. Suma tych zbiorów jest zdefiniowana następującym wzorem:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \int_{u \in J_x^u} \int_{v \in J_x^v} f_x(u) * g_x(v) / u * v \quad (10.9)$$

Dla każdej pary u, v funkcja podstawowej przynależności sumy zbiorów jest ich s -normą. Funkcja drugorzędnej przynależności sumy zbiorów rozmytych typu 2 jest maksymalną wartością t -normy dla wszystkich par u, v o takiej samej wartości s -normy.

Przykład 10.3

Wyznaczmy sumę następujących zbiorów rozmytych typu 2:

$$\tilde{A} = [0,4/0,1 + 1/0,6 + 0,6/0,8] / 3 + [0,6/0,7 + 1/0,1] / 5 + [0,2/0,4 + 1/0,9 + 0,4/1] / 7$$

$$\tilde{B} = [1/0,9] / 3 + [0,4/0,7 + 0,9/0,9] / 5 + [0,9/0,5 + 1/0,8] / 7$$

Zastosujmy operacje standardowe jako t -normę i s -normę. Obliczmy funkcję przynależności dla kolejnych elementów $x = 3, 5, 7$:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(3) = \frac{\max[0,4 \wedge 1; 1 \wedge 1; 0,6 \wedge 1]}{0,9} = \frac{1}{0,9}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(5) = \frac{\max[0,6 \wedge 0,4; 1 \wedge 0,4]}{0,7} + \frac{\max[0,6 \wedge 0,9; 1 \wedge 0,9]}{0,9} = \frac{0,4}{0,7} + \frac{0,9}{0,9}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(7) = \frac{0,2 \wedge 0,9}{0,5} + \frac{\max[1 \wedge 0,9; 1 \wedge 1]}{0,9} + \frac{\max[0,4 \wedge 0,9; 0,4 \wedge 1]}{1} = \frac{0,2}{0,5} + \frac{1}{0,9} + \frac{0,4}{1}$$

Ostatecznie suma tych zbiorów wynosi:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = (1/0,9) / 3 + (0,4/0,7 + 0,9/0,9) / 5 + (0,2/0,5 + 1/0,9 + 0,4/1) / 7$$

Funkcja przynależności do iloczynu zbiorów rozmytych typu 2 jest obliczana następująco:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \int_{u \in J_x^u} \int_{v \in J_x^v} f_x(u) * g_x(v) / u * v \quad (10.10)$$

Funkcja podstawowej przynależności jest obliczana jako t-norma z u, v . Dla wszystkich par u, v dających taką samą wartość t-normy funkcje drugorzędnej przynależności są równe największej wartości ich t-norm. We wzorze 10.10 występują dwie t-normy. Mogą one lecz nie muszą być takie same.

Przykład 10.4.

Znajdźmy iloczyn zbiorów z przykładu 10.4. Zastosujmy t-normę standardową dla obu działań we wzorze 10.10.

$$\tilde{A} = [0,4/0,1 + 1/0,6 + 0,6/0,8]/3 + [0,6/0,7 + 1/0,1]/5 + [0,2/0,4 + 1/0,9 + 0,4/1]/7$$

$$\tilde{B} = [1/0,9]/3 + [0,4/0,7 + 0,9/0,9]/5 + [0,9/0,5 + 1/0,8]/7$$

Tak jak poprzednio obliczmy dla kolejnych elementów $x = 3, 5, 7$ ich funkcje przynależności:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(3) = \frac{0,4 \wedge 1}{0,1} + \frac{1 \wedge 1}{0,6} + \frac{0,6 \wedge 1}{0,8} = \frac{0,4}{0,1} + \frac{1}{0,6} + \frac{0,6}{0,8}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(5) = \frac{\max[0,6 \wedge 0,4; 0,6 \wedge 0,9]}{0,7} + \frac{\max[1 \wedge 0,4; 1 \wedge 0,9]}{0,1} = \frac{0,6}{0,7} + \frac{0,9}{0,1}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(7) = \frac{\max[0,2 \wedge 0,9; 0,2 \wedge 1]}{0,4} + \frac{\max[1 \wedge 0,9; 0,4 \wedge 0,9]}{0,5} + \frac{0,4 \wedge 1}{0,8} = \frac{0,2}{0,4} + \frac{0,9}{0,5} + \frac{0,4}{0,8}$$

Otrzymujemy zbiór:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = [0,4/0,1 + 1/0,6 + 0,6/0,8]/3 + [0,6/0,7 + 0,9/0,1]/5 + [0,2/0,4 + 0,9/0,5 + 0,4/0,8]/7$$

Funkcja przynależności dopełnienia zbioru rozmytego typu 2 jest wyznaczana według wzoru:

$$\mu_{-\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / (1 - u) \quad (10.11)$$

Przykład 10.5.

Wyznaczmy dopełnienie następującego zbioru rozmytego typu 2:

$$\tilde{A}(x) = (0,1/0,6 + 1/0,9)/5$$

Zgodnie ze wzorem 10.11 dopełnienie do tego zbioru ma postać:

$$-\tilde{A}(x) = (0,1/0,4 + 1/0,1)/5$$

10.3. Relacje rozmyte typu 2

Rozważmy binarną relację rozmytą typu 2, określoną na iloczynie kartezjańskim dziedzin dwu zbiorów rozmytych $X \times Y$. Relacja, jak wiadomo z rozdziału 3, jest zbiorem rozmytym o określonym stopniu przynależności dla każdej pary elementów x, y . W przypadku rozmytej relacji typu 2, funkcja ta jest określona następująco:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \int_{v \in J_{x,y}^v} r_{x,y}(v) / v \quad (10.12)$$

Funkcja drugorzędnej przynależności $r_{x,y}$ jest zbiorem rozmytym typu 1, określonym na przedziale $[0, 1]$.

Przykład 10.6.

Niech dla przykładu relacja rozmyta typu 1, określona na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, gdzie $X = \{5, 9\}$ oraz $Y = \{3, 5\}$ odpowiada nieprecyzyjnemu stwierdzeniu „ x dużo większe od y ” i ma postać:

$$R = \frac{0,4}{(5; 3)} + \frac{1}{(9; 3)} + \frac{0}{(5; 5)} + \frac{0,7}{(9; 5)}$$

Utwórzmy przykładową relację rozmytą typu 2 odpowiadającą powyższemu stwierdzeniu:

$$\tilde{R} = [0,4/0,3 + 1/0,4 + 0,6/0,5] / (5; 3) + [0,1/0,1 + 1/1 + 0,7/0,8] / (9; 3) + [1/0 + 0,5/0,6 + 0,4/0,1] / (5; 5) + [0,4/0,5 + 1/0,7 + 0,6/0,8] / (9; 5)$$

Relacja rozmyta typu 2 może być także rozumiana, jako rozszerzenie operacji na zbiorach rozmytych typu 2, określonych na różnych uniwersach. Jeśli zbiór \tilde{A} jest zdefiniowany w przestrzeni X , natomiast \tilde{B} w przestrzeni Y , to zarówno rozszerzona s -norma, jak również rozszerzona t -norma tych zbiorów są rozmytymi relacjami typu 2. Można więc zapisać wzory:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R}_S}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(y) \\ \mu_{\tilde{R}_T}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(y) \end{aligned} \quad (10.13)$$

Ważną z praktycznego punktu widzenia operacją jest złożenie relacji, które dla typu 2 jest określone poprzez następującą postać funkcji przynależności:

$$\mu_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}(x, z) = \tilde{S}_{y \in Y} \mu_{\tilde{S}}(x, y) * \mu_{\tilde{R}}(y, z) \quad (10.14)$$

Relacja S została utworzona na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, natomiast R - $Y \times Z$. W wyniku złożenia otrzymujemy relację na iloczynie kartezjańskim $X \times Z$.

10.4 Redukcja typu

Zastosowanie zbiorów rozmytych w systemach wymaga określenia operacji wyostrzania, którą dla zbiorów typu 2 poprzedza operacja redukcji typu. Jest ona podobna do wyznaczania centroidu zbiorów rozmytych typu 1 określonych na dyskretnym uniwersum. Wyznacza się go wtedy z zależności [7,9 12]:

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)} \quad (10.15)$$

Centroid zbioru rozmytego typu 2 jest zbiorem rozmytym typu 1 określonym na dyskretnym zbiorze elementów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ z dziedziny drugorzędnej funkcji przynależności. Oznaczmy:

$$a(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^n \theta_i} \quad (10.16)$$

$$b(\theta) = f_{x_1}(\theta_1) * f_{x_2}(\theta_2) * \dots * f_{x_n}(\theta_n) \quad (10.17)$$

Centroid zbioru rozmytego typu 2 jest wyznaczany według wzoru:

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \int_{\theta_2 \in J_{x_2}} \dots \int_{\theta_n \in J_{x_n}} \frac{[b(\theta)]}{a(\theta)} \quad (10.18)$$

Algorytm wyznaczania centroidu opisanego wzorem 10.18 składa się z następujących kroków:

1. Dyskretyzacja uniwersum x na n punktów x_1, x_2, \dots, x_n .
2. Dyskretyzacja dziedzin drugorzędnych funkcji przynależności J_{x_i} odpowiadających każdemu punktowi x_i na odpowiednie liczby punktów M_j ($j=1, 2, \dots, n$).
3. Ponumerowanie wszystkich powstałych zbiorów. Ich całkowita liczba wyniesie

$$\prod_{j=1}^n M_j .$$

4. Wyliczenie centroidu posługując się wzorami 10.16, 10.17 i 10.18. Wyznaczenie centroidu zbiorów rozmytych ilustruje przykład 10.7.

Przykład 10.7

Dany jest zbiór rozmyty dyskretny typu 2. Dokonajmy redukcji typu tego zbioru, jeśli

$$\tilde{A} = [0,5/0,4 + 1/0,7]/1 + [0,5/0,6 + 1/0,9]/2$$

Zbiór jest dyskretny możemy więc pominąć punkty 1 i 2 algorytmu.

Mamy tu cztery zbiory, dla których wartości obliczone według wzoru 10.16 wynoszą:

$$a_1 = \frac{1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 1,6$$

$$a_2 = \frac{1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,9}{0,4 + 0,9} \approx 1,69$$

$$a_3 = \frac{1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,6}{0,7 + 0,6} \approx 1,46$$

$$a_4 = \frac{1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,9}{0,7 + 0,9} \approx 1,56$$

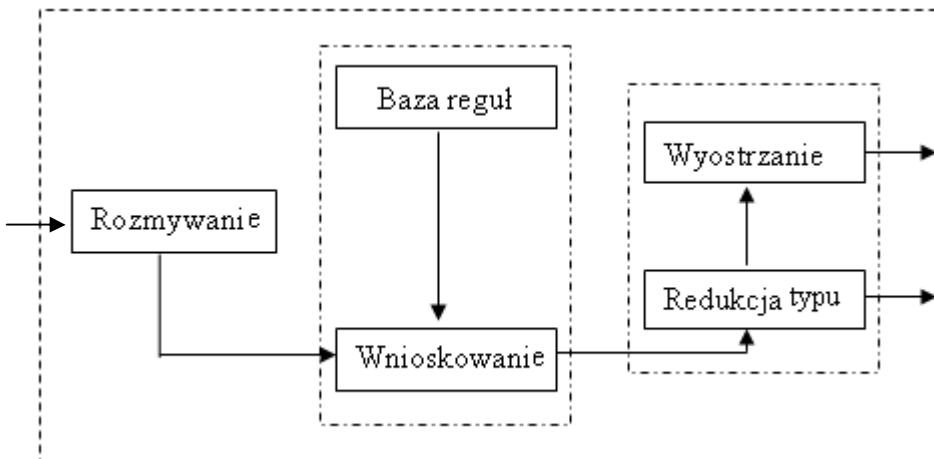
Zbiór rozmyty typu 1 będący centroidem zbioru rozmytego typu 2 \tilde{A} będzie więc miał postać:

$$C_{\tilde{A}} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{a_1} + \frac{0,5 \cdot 1}{a_2} + \frac{1 \cdot 0,5}{a_3} + \frac{1 \cdot 1}{a_4} = \frac{0,25}{1,6} + \frac{0,5}{1,69} + \frac{0,5}{1,46} + \frac{1}{1,56}$$

Wyznaczenie centroidu jest niezbędne w systemach wnioskujących. Jest wstępnym krokiem do operacji wyostrzania.

10.5. Systemy rozmyte typu 2

Systemy rozmyte typu 2 znajdują obecnie szerokie zastosowanie w sterownikach, systemach eksperckich, systemach rozpoznawania wzorców itp. Schemat blokowy systemu rozmytego typu 2 przedstawiono na rys. 10.4. Wyróżnia się w tym układzie następujące bloki: rozmywania, wnioskowania, bazę wiedzy, bloki redukcji typu oraz wyostrzania [15, 16, 18].



Rys. 10.4. Podstawowe bloki systemu rozmytego typu 2

Przedstawiony schemat jest bardzo podobny do przedstawionego na rys 6.1 sterownika rozmytego, należy jednak pamiętać, że poszczególne fragmenty działają w oparciu o zbiory rozmyte typu 2. Już w bloku rozmywania zastosowanie zbiorów rozmytych typu 2 stwarza wiele nowych możliwości. Najprostszym i najczęściej stosowanym sposobem jest typ singleton-singleton. Metoda ta polega na przypisaniu funkcji przynależności podstawowej równej 1 danej wartości wejściowej podobnie jak w systemie typu 1. Funkcja drugorzędnej przynależności przyjmuje wartość 1 zarówno dla podstawowej przynależności równej 1, jak również 0 (wzór 10.19).

$$\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \begin{cases} 1/1 & \text{dla } x_i = \bar{x}_i \\ 1/0 & \text{dla } x_i \neq \bar{x}_i \end{cases} \quad (10.19)$$

Możliwe są również inne sposoby rozmywania. Jednym z nich jest typ rozmywania singleton-przedział, w którym funkcja podstawowej przynależności jest typu singleton, natomiast drugorzędna przynależność przedziałem. Możliwe jest też rozmywanie nonsingleton-singleton. W tym przypadku podstawowa przynależność nie jest singletonem, natomiast drugorzędna singletonem.

Baza reguł również różni się od opisanej w rozdziale 5.5 tym, że występują w niej zbiory rozmyte typu 2. Regułę k-tą można dla systemu rozmytego typu 2 z wieloma wyjściami i jednym wyjściem (MISO) zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(k)} : \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } \tilde{A}_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } \tilde{A}_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } \tilde{A}_n^k, \text{ I } \dots \\ \text{I } x_N \text{ jest } \tilde{A}_N^k \text{ TO } y \text{ jest } \tilde{B}^k \end{aligned} \quad (10.20)$$

Oznaczmy przez \tilde{A}^k iloczyn kartezyjski wejściowych zbiorów rozmytych, czyli:

$$\tilde{A}^k = \tilde{A}_1^k \times \tilde{A}_2^k \times \dots \times \tilde{A}_n^k \times \dots \times \tilde{A}_N^k \quad (10.21)$$

Regułę (10.20) można zapisać jako implikację:

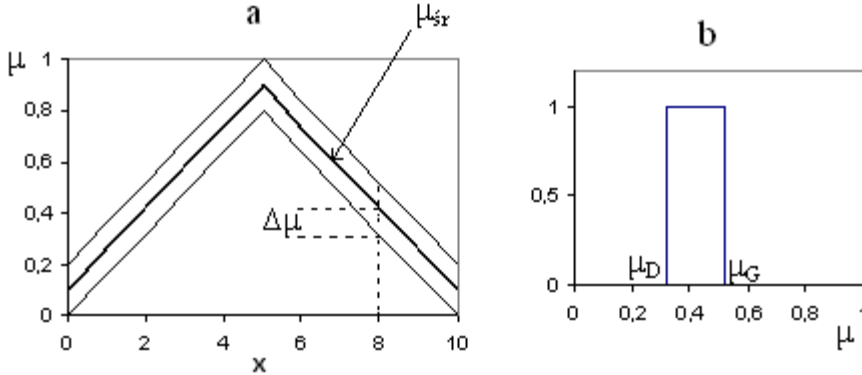
$$\tilde{A}^k \Rightarrow \tilde{B}^k \quad (10.22)$$

Funkcja przynależności do iloczynu kartezyjskiego jest wynikiem działania t-normy na wejściowe zbiory rozmyte typu 2. Podobnie jak w systemach rozmytych typu 1 funkcje przynależności do wyjściowych zbiorów rozmytych zależą od zastosowanej na wejściu t-normy oraz rodzaju implikacji. Po otrzymaniu wyników wnioskowania czyli zbiorów \tilde{B}^k dokonywana jest ich agregacja, następnie redukcja typu i wyostrzenie. Generalnie, obliczenia w systemach rozmytych typu 2 są wykonywane bardzo wolno, a koszt obliczeniowy jest duży. Dlatego często stosowane są przedziałowe funkcje drugorzędnej przynależności. Są one wtedy stałe i równe 1 we wszystkich przedziałach. Szerokość przedziału dla danej wartości x może, lecz nie musi być stała. W przypadku stałej szerokości przedziału przyjmuje się dolne μ_D i górne μ_G wartości funkcji przynależności, a następnie oblicza ich średnią μ_{sr} oraz szerokość przedziału $\Delta\mu$ według prostych wzorów:

$$\mu_{sr}(x) = \frac{\mu_G(x) + \mu_D(x)}{2} \quad (10.23)$$

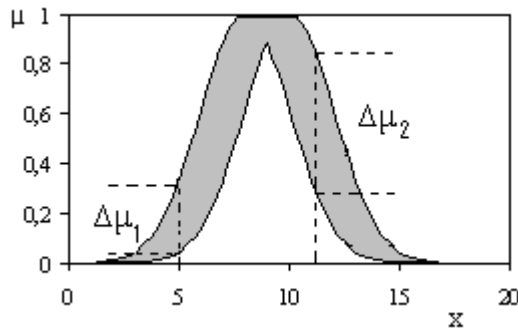
$$\Delta\mu = \mu_G - \mu_{sr} = \mu_{sr} - \mu_D \quad (10.24)$$

Na rys. 10.5 przedstawiono funkcje podstawowej i drugorzędnej przynależności do przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2 o stałej dla wszystkich x szerokości przedziału.



Rys. 10.5. Podstawowa (rys. a) i drugorzędna funkcja przynależności dla $x=8$ (rys. b)

Przedziałowe zbiory rozmyte typu 2 mogą być modelowane gaussowskimi funkcjami przynależności z przesuniętymi wartościami środkowymi. Na rys. 10.6 przedstawiono przykładową funkcję przynależności do przedziałowego zbioru rozmytego typu 2 uzyskaną w wyniku złożenia dwu przesuniętych funkcji gaussowskich z wartościami średnimi równymi 8 i 10. Szerokości przedziałów zależą od wartości x .



Rys. 10.6. Funkcja podstawowej przynależności do przedziałowego zbioru rozmytego typu 2 modelowana dwiema funkcjami gaussowskimi o wartościach średnich 8 i 10

Dla zilustrowania wnioskowania z zastosowaniem przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2 przedstawiony został przykład systemu z dwiema regułami.

Przykład 10.8.

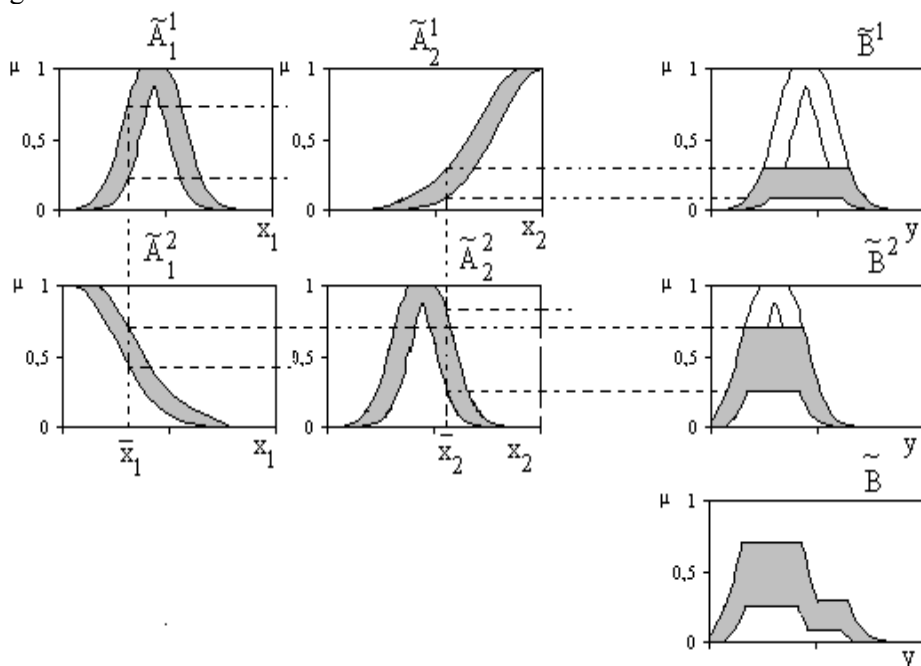
Rozpatrzmy system rozmyty typu 2 z dwiema regułami z zastosowaniem operacji minimum, jako t-normy oraz implikacji Mamdaniego.

Reguły rozmyte można zapisać następująco:

$\tilde{R}^{(1)}$: JEŻELI x_1 jest \tilde{A}_1^1 I x_2 jest \tilde{A}_2^1 TO y jest \tilde{B}^1

$\tilde{R}^{(2)}$: JEŻELI x_1 jest \tilde{A}_1^2 I x_2 jest \tilde{A}_2^2 TO y jest \tilde{B}^2

Funkcje przynależności do przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2 wejściowych i wyjściowych oraz wynik wnioskowania dla wartości wejściowych \bar{x}_1 i \bar{x}_2 przedstawiono na rys. 10.7. Zastosowano rozmywanie typu singleton-singleton.



Rys. 10.7. Przykład działania sterownika z implikacją Mamdaniego o dwóch wejściach i jednym wyjściu, z zastosowaniem przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2

Działania na przedziałowych zbiorach rozmytych typu 2 sprowadzić można do operacji na zbiorach rozmytych typu 1. Jak widać na rys. 10.7 odpowiednie operacje przeprowadzono dla górnych i dolnych granic funkcji przynależności. Algorytm obliczeń wynikowego zbioru rozmytego typu 2 w przykładzie 10.8 składa się z następujących kroków:

1. Wartości wejściowe \bar{x}_1 i \bar{x}_2 zostały rozmyte metodą singleton-singleton (wzór 10.19).
2. W każdej z reguł znaleziono górne i dolne granice przedziałów powstałych w wyniku przecięcia singletonów odpowiadających wartościom wejściowym

z odpowiednimi funkcjami przynależności do przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2.

3. Dla każdej z reguł znaleziono wyniki działania t-normy (w tym przykładzie minimum) oddzielnie na górne i dolne granice przedziałów.

4. Wartości wynikowe dla górnych i dolnych granic przedziałów zastosowano jako stopnie aktywacji przy zastosowaniu danego typu implikacji (w przykładzie 10.8 zastosowano implikację Mamdaniego)

5. Zagregowano powstałe zbiory rozmyte typu 2 przy zastosowaniu s-normy (w tym przykładzie maksimum).

Złożoność obliczeniowa algorytmu wnioskowania z zastosowaniem przedziałowych zbiorów rozmytych typu 2 jest niewiele większa niż zbiorów rozmytych typu 1. Również wyostrzenie można sprowadzić do obliczeń na górnych i dolnych wartościach funkcji przynależności w wynikowym przedziałowym zbiorze rozmytym typu 2 według algorytmu składającego się z następujących kroków:

1. Podział zakresu wartości wyjściowych na N dyskretnych wartości $[y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_N]$.

2. Dla każdej wartości y_n znalezienie dolnej i górnej granicy przedziału funkcji przynależności $[\theta_n^D, \theta_n^G]$.

3. Obliczenie wartości średniej $\theta_n^{sr} = \frac{[\theta_n^D + \theta_n^G]}{2}$

4. Wyznaczenie wartości ostrej według wzoru:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{n=1}^N y_n \theta_n^{sr}}{\sum_{n=1}^N \theta_n^{sr}}$$

Przedziałowe zbiory rozmyte znajdują obecnie szerokie zastosowanie w sterownikach, systemach eksperckich, układach rozpoznających itp. Ich przewaga nad systemami rozmytymi typu 1 wynika z faktu, że przy niezbyt dużym nakładzie obliczeniowym można w projektowanych systemach uwzględnić nieprecyzyjność przy wyznaczaniu funkcji przynależności.

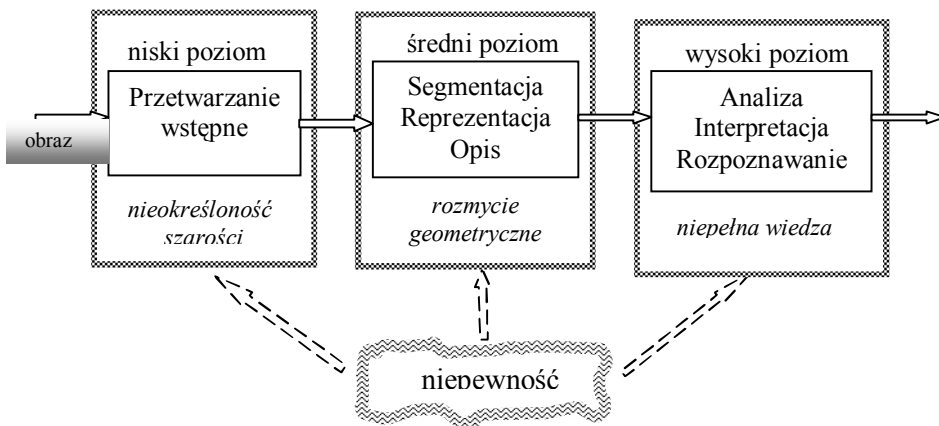
ROZDZIAŁ 11

ELEMENTY ROZMYTEGO PRZETWARZANIA OBRAZÓW

11.1. Niepewność w przetwarzaniu obrazów.....	127
11.2. Poprawa jakości obrazu z zastosowaniem zbiorów rozmytych.....	128
11.3. Techniki rozmytej segmentacji.....	131
11.4. Detekcja krawędzi z zastosowaniem logiki rozmytej.....	134

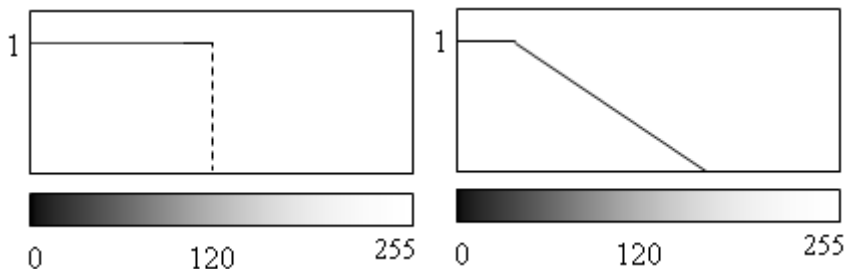
11.1. Niepewność w przetwarzaniu obrazów

Zastosowanie zbiorów rozmytych i logiki rozmytej w przetwarzaniu obrazów jest uzasadnione naturalnym brakiem ostrych granic pomiędzy poziomami szarości czy połączeniami kolorów, wynika także z uwzględnienia percepcyjnych właściwości człowieka, którego postrzeganie programy komputerowe starają się naśladować. Dlatego też, celowe jest zastosowanie rozmytych technik na wszystkich poziomach przetwarzania obrazów (rys. 11.1). Na niskim poziomie, czyli przy przetwarzaniu wstępnym, brana jest pod uwagę nieokreśloność granic szarości lub koloru, na średnim, obejmującym segmentację, reprezentację i opis obrazu, rozmycie geometryczne, natomiast na wysokim poziomie, czyli w analizie, interpretacji i rozpoznawaniu obrazów, brak pełnej wiedzy o analizowanych obiektach.



Rys. 11.1 Niepewność oraz niepełna wiedza w przetwarzaniu obrazów

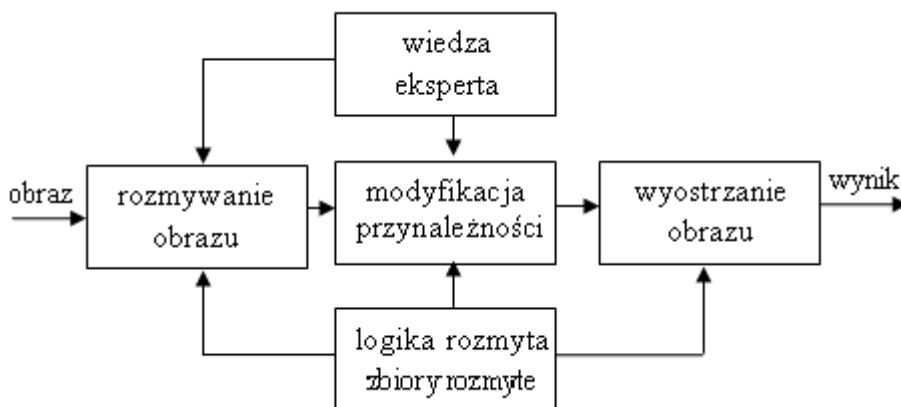
Na niskim poziomie przetwarzania poziom szarości jest określony liczbą z przedziału 0 – 255. Taki sposób reprezentacji nie uwzględnia postrzegania człowieka, który nie dostrzega ostrych granic pomiędzy dyskretnymi poziomami szarości. Różnice pomiędzy ostrą i rozmytą reprezentacją poziomu szarości przedstawia rys. 11.2.



Rys. 11.2. Reprezentacja poziomu szarości przy zastosowaniu zbiorów ostrych (z lewej strony) i rozmytych (z prawej strony)

11.2. Poprawa jakości obrazu z zastosowaniem zbiorów rozmytych

Obrazy rzeczywiste, szczególnie medyczne, są niekiedy nieostre lub zaszumione. Dlatego też, pierwszym etapem przetwarzania jest poprawa ich jakości. Przetwarzanie obrazów z zastosowaniem zbiorów rozmytych obejmuje następujące etapy: rozmywanie obrazu, modyfikację funkcji przynależności oraz wyostrażanie (rys. 11.3.). We wszystkich etapach wykorzystywany jest stan wiedzy z zakresu zbiorów rozmytych i logiki rozmytej. Etapy rozmywania i modyfikacji wykorzystują wiedzę eksperta zarówno do konstrukcji, jak i przekształcania funkcji przynależności.



Rys. 11.3. Ogólny schemat przetwarzania obrazów z zastosowaniem zbiorów rozmytych i logiki rozmytej

W procesie rozmywania każdemu pikselowi o określonym poziomie szarości zostaje przyporządkowany stopień przynależności do odpowiedniego, zaproponowanego przez eksperta zbioru rozmytego. Jeżeli obraz jest dwuwymiarowy i czarno-biały, może być reprezentowany przez macierz $M \times N$, w której $g_{m,n}$ oznacza poziom jasności piksela o indeksie pionowym m i poziomym n :

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{M1} & g_{M2} & \dots & g_{MN} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Rozmywanie obrazu polega najczęściej na przyporządkowaniu każdemu poziomowi jasności odpowiedniego stopnia przynależności do zbioru rozmytego *jasny*. Każdy piksel będzie więc charakteryzował się określonym stopniem przynależności $\mu_{mn} \in [0, 1]$. Często stosowana funkcja przynależności wyraża się wzorem:

$$\mu_{mn} = \left(1 + \frac{g_{\max} - g_{mn}}{\beta} \right)^{-\gamma} \quad (11.2)$$

We wzorze 11.2 g_{\max} oznacza największą jasność, natomiast γ i β są odpowiednio dobraćanymi współczynnikami. W wyniku operacji rozmywania macierz 11.1 przybiera następującą formę:

$$U = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1N} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{M1} & \mu_{M2} & \dots & \mu_{MN} \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

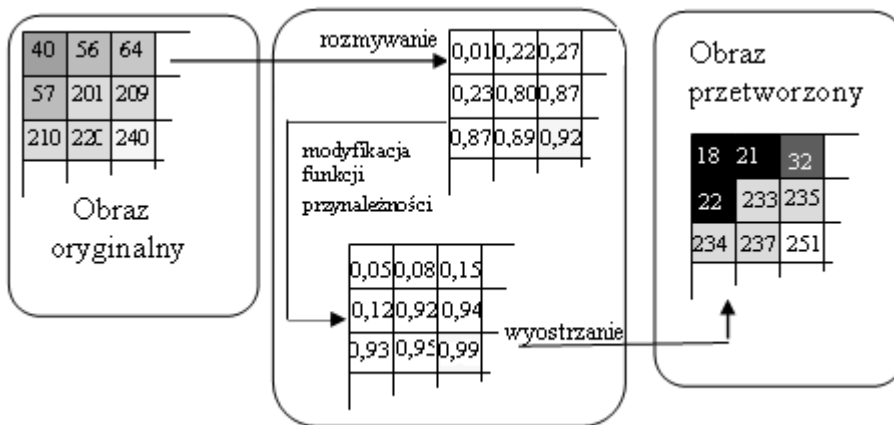
W celu zwiększenia kontrastu obrazu można dokonać modyfikacji funkcji przynależności według reguły:

$$\mu'_{mn} = \begin{cases} 2 \cdot [\mu_{mn}]^2 & 0 \leq \mu_{mn} \leq 0,5 \\ 1 - 2 \cdot [1 - \mu_{mn}]^2 & 0,5 < \mu_{mn} \leq 1 \end{cases} \quad (11.4)$$

Wyostrenie jest procesem odwrotnym do rozmywania i w związku z tym może być przeprowadzone według formuły:

$$g'_{mn} = g_{\max} - \beta[(\mu'_{mn})^{-1/\gamma} - 1] \quad (11.5)$$

Po modyfikacji i wyostreniu na wyjściu powstaje obraz o większym kontraście (rys. 11.4).



Rys. 11.4. Etapy przetwarzania rozmytego

Algorytm rozmytego zwiększania kontrastu składa się więc z następujących kroków:

1. Ustalenie parametrów g_{\max} , β , γ .
2. Rozmywanie poziomu jasności według wzoru 11.2.
3. Rekursywna modyfikacja funkcji przynależności $\mu_{mn} \rightarrow \mu'_{mn}$ według wzoru

11.4.

4. Generacja nowych poziomów jasności g'_{mn} według odwrotnego przekształcenia (wzór 11.5).

Oczywiście możliwe jest przy zastosowaniu tej metody również zmniejszenie kontrastu. W tym celu, dla przykładu, modyfikacja funkcji przynależności (krok 3) mogłaby być uśrednioną wartością dla kilku (np.: czterech) sąsiednich pikseli:

$$\mu'_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{m,n \in Q} \mu_{mn} \quad (11.6)$$

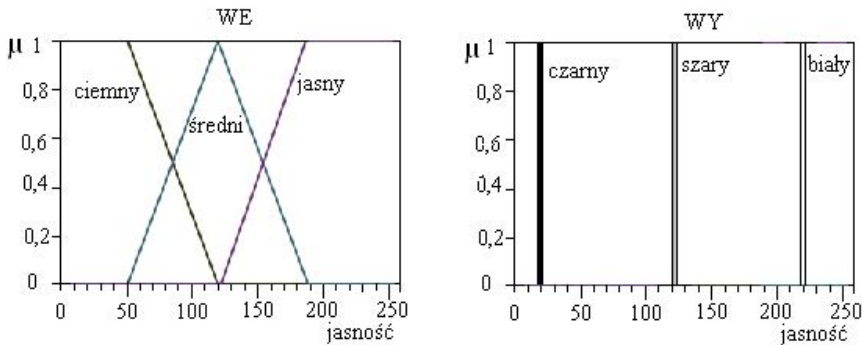
gdzie $Q = \{ \langle i, j+1 \rangle, \langle i, j-1 \rangle, \langle i+1, j \rangle, \langle i-1, j \rangle \}$.

Uniwersalną metodą rozmytego przetwarzania obrazów cyfrowych jest wykorzystanie odpowiednio dobranych reguł rozmytych. Ten sposób może również służyć do poprawy kontrastu. Algorytm oparty o reguły rozmyte przetwarzania obrazu składa się z następujących kroków:

1. Ustawienie parametrów systemu wnioskowania rozmytego tj. cech wejściowych, funkcji przynależności itp.
2. Opracowanie bazy reguł rozmytych.
3. Rozmywanie jasności aktualnego piksela.
4. Wnioskowanie na podstawie bazy reguł.
5. Wyostrzenie.

Przykład 11.1.

Prześledźmy działanie algorytmu przetwarzania obrazu opartego o następujące funkcje przynależności do zbiorów rozmytych wejściowych *ciemny*, *średni*, *jasny* oraz wyjściowych singletonów rozmytych: *czarny*, *szary*, *biały* (rys. 11.5).



Rys. 11.5. Zbiory rozmyte wejściowe (WE) i wyjściowe (WY) do regułowej regulacji kontrastu

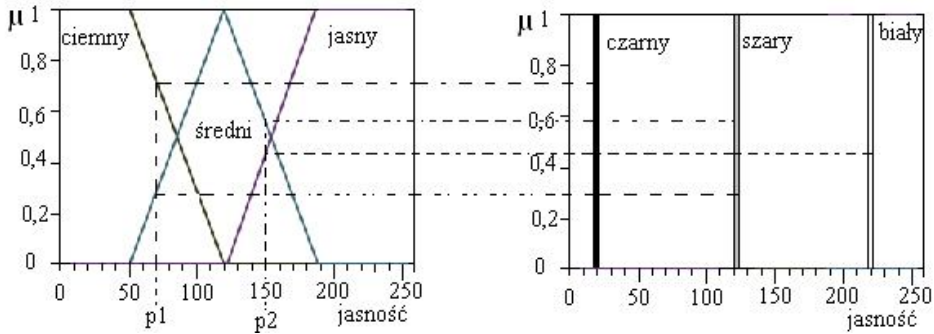
Utwórzmy bazę następujących reguł rozmytych:

R^1 : JEŻELI g_{mn} *ciemny* TO g'_{mn} *czarny*

R^2 : JEŻELI g_{mn} *średni* TO g'_{mn} *szary*

R^3 : JEŻELI g_{mn} *jasny* TO g'_{mn} *biały*

Prześledźmy wynik wnioskowania dla dwóch pikseli p_1 (o jasności 70) i p_2 (o jasności 150). Wynik wnioskowania przedstawiony został na rys. 11.6.



Rys. 11.6. Wnioskowanie rozmyte dla pikseli P1 i P2 o jasnościach 70 i 150

W wyniku aktywacji pierwszej reguły dla pikseli o jasności p1 otrzymujemy stopień przynależności 0,3 do singletonu *czarny* i 0,76 do singletonu *szary*. Ponieważ zbiory wyjściowe są singletonami wyostżanie przeprowadzimy według wzoru:

$$g'_{mn} = \frac{\mu_{ciemny} \cdot S1 + \mu_{średni} \cdot S2 + \mu_{jasny} \cdot S3}{\mu_{ciemny} + \mu_{średni} + \mu_{jasny}} \quad (11.7)$$

Dla pikseli o jasności p1 otrzymamy:

$$g'_{p1} = \frac{0,76 \cdot 20 + 0,3 \cdot 120}{0,76 + 0,3} \approx 48$$

Natomiast dla pikseli p2 o jasności 150:

$$g'_{p2} = \frac{0,47 \cdot 220 + 0,59 \cdot 120}{0,47 + 0,59} \approx 164$$

Widzimy więc, że piksele o jasności 70 zostały przyciemnione, piksele o jasności 150 rozjaśnione.

11.3. Techniki rozmytej segmentacji

W wielu aplikacjach stosuje się progowanie obrazów na ich odpowiedniki binarne. Generowanie obrazów binarnych jest częstą procedurą przy ekstrakcji cech i rozpoznawaniu obiektów. Może być traktowane, jako najprostszy sposób segmentacji lub bardziej ogólnie, jako dwuklasowa procedura grupowania. Wyróżnia się kilka algorytmów progowania rozmytego (ang. fuzzy thresholding), a mianowicie: metoda reguł rozmytych (ang. rule-based approach), zastosowanie teorii informacji (ang. information-theoretical approach), podejście rozmytej geometrii (ang. fuzzy geometrical approach) grupowanie rozmyte (ang. fuzzy clustering) np.: przy zastosowaniu rozmytej metody c-średnich (ang. fuzzy c-means – FCM).

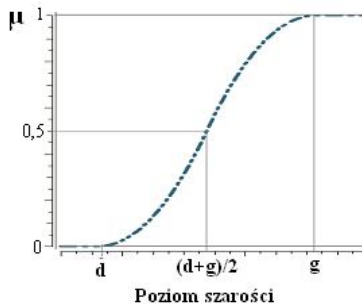
Często w progowaniu obrazów znajduje zastosowanie metoda związana z teorią informacji ze względu na prostotę i szybkość. Polega ona na poszukiwaniu minimów lub maksimów takich wielkości jak indeks rozmycia (ang. index of fuzziness), rozmytej entropii (ang. fuzzy entropy), rozmytej dywergencji (ang. fuzzy divergence) itp. Najczęściej stosowaną miarą jest indeks rozmycia, który dla podzbioru A obrazu $M \times N$ z L poziomami szarości ($g \in [0, L-1]$), histogramem $h(g)$ i funkcją przynależności $\mu_A(g)$ jest definiowany następująco:

$$\gamma_L(A) = \frac{2}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \cdot \min[\mu_A(g), 1 - \mu_A(g)] \quad (11.8)$$

Dla obrazów przestrzennych wzór 11.8 przybiera postać:

$$\gamma_L(A) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \min[\mu_A(g_{m,n}), 1 - \mu_A(g_{m,n})] \quad (11.9)$$

W celu określenia globalnego i lokalnego rozmycia należy zdefiniować funkcję przynależności $\mu_A(g)$. W literaturze spotyka się zastosowanie różnego rodzaju funkcji od standardowej funkcji s (rys. 11.7) po wyrażonej liczbą LP (wzór 11.10).



Rys. 11.7. Funkcja przynależności typu s w zastosowaniu do progowania obrazów

Tizhoosh zdefiniował progującą funkcję przynależności jako liczbę LP :

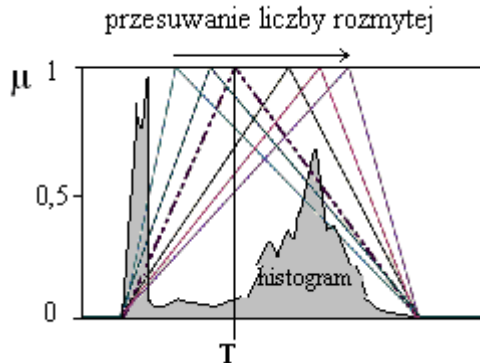
$$\mu(g) = \begin{cases} 0 & \text{dla } g \leq g_{\min} \quad g \geq g_{\max} \\ L(g) = \left(\frac{g - g_{\min}}{T - g_{\min}} \right)^\alpha & \text{dla } g_{\min} < g < T \\ P(g) = \left(\frac{g_{\max} - g}{g_{\max} - T} \right)^\beta & \text{dla } T \leq g < g_{\max} \end{cases} \quad (11.10)$$

We wzorze 11.10 g_{\min} i g_{\max} oznaczają: minimalny i maksymalny poziom jasności, T – odpowiednio zmieniający poziom w zakresie $[0, L-1]$. Współczynniki α , β są dobierane do danego histogramu.

Ogólny algorytm progowania obrazów z zastosowaniem miary rozmycia składa

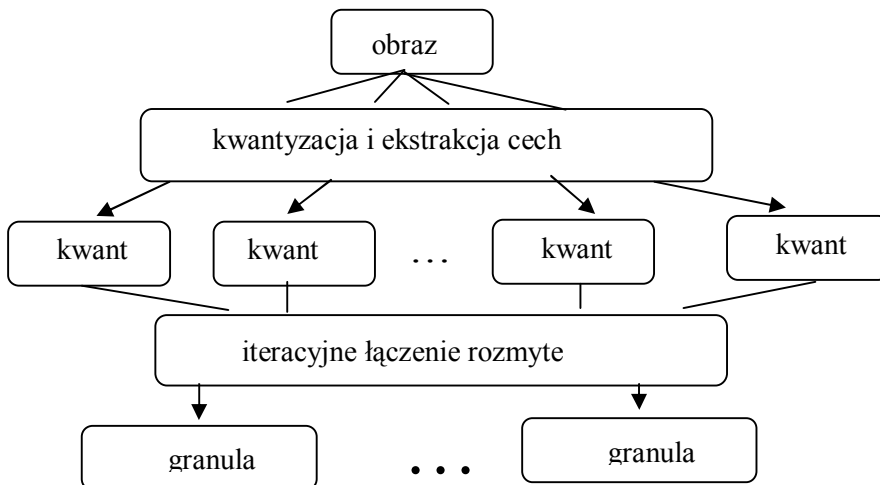
się z następujących kroków:

1. Wybór kształtu funkcji przynależności.
2. Wybór właściwej miary rozmycia (np.: obliczanej według wzoru 11.8).
3. Obliczenie histogramu obrazu.
4. Inicjalizacja położenia funkcji przynależności.
5. Przesuwanie funkcji przynależności wzdłuż zakresu poziomu szarości (przykład przesuwania przedstawia rys. 11.8) i wyliczanie w każdej pozycji odpowiedniego rozmycia (wzór 11.10).
6. Lokalizacja poziomu optymalnego g_{opt} w maksimum rozmycia.
7. Przyjęcie poziomu $T=g_{opt}$ za wyznaczony próg.



Rys. 11.8. Przesuwanie funkcji przynależności typu Λ w zakresie poziomu szarości. Maksimum rozmycia (T) wskazuje optymalny próg

W przetwarzaniu obrazów medycznych znalazła też zastosowanie koncepcja Zadeha rozmytej granulacji. Ideę takiego przetwarzania zilustrowano na rys. 11.9.



Rys. 11.9. Implementacja metody rozmytej granulacji

11. 4. Detekcja krawędzi z zastosowaniem logiki rozmytej

Obrazy rzeczywiste, szczególnie medyczne lub wykonane w podczerwieni są często niekompletne i nieostre. W szczególności trudnym problemem jest wykrycie krawędzi, rozmytych, słabo widocznych, częściowo ukrytych, zniekształconych w wyniku niejednorodnego oświetlenia itp. Typowe krawędzie charakteryzują się gwałtowną zmianą funkcji lub nachylenia płaskiej powierzchni. W obrazach rozmytych krawędzie mają różne stopnie zaciemnienia lub oddzielają obszary o niejednakowej jasności oraz zaszumione. Regiony, które nie są rozdzielone w sposób ostry, mogą być traktowane jako rozmyte podzbiory obrazu. Każdemu pikselowi obrazu może być przyporządkowany stopień przynależności do zbioru rozmytego [2-4, 6, 11, 22-23].

W praktycznych realizacjach zakres intensywności jest dzielony na szereg podzbiorów rozmytych $X_1 = \{\mu(x, y)/(x, y)\}$ reprezentujących kolejne (l-te) poziomy intensywności. Powierzchnia podzbiorów rozmytych:

$$a(\mu) = \sum_x \sum_y \mu(x, y) \quad (11.11)$$

Długość ($l(\mu)$) i szerokość ($b(\mu)$) zbioru rozmytego można przedstawić wzorami:

$$l(\mu) = \max_x \left(\sum_y \mu(x, y) \right) \quad (11.12)$$

$$b(\mu) = \max_y \left(\sum_x \mu(x, y) \right) \quad (11.13)$$

Indeks pola obszaru zbioru rozmytego (ang. index of area coverage) IOAC wyraża się następującym wzorem:

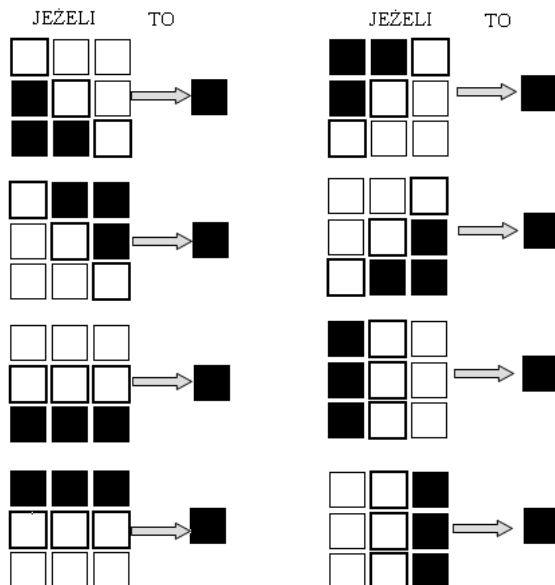
$$IOAC(\mu) = \frac{a(\mu)}{l(\mu) \cdot b(\mu)} \quad (11.14)$$

Minimalizacja wskaźnika IOAC jest obiektywnym kryterium progowania histogramu i segmentacji obrazów. Algorytm wykorzystujący powyższy wskaźnik składa się z następujących kroków:

1. Konstrukcja funkcji przynależności np.: typu s lub Λ
2. Obliczenie wskaźnika IOAC(μ) według wzorów 11.11 – 11.14.
3. Przesuwanie funkcji przynależności (jak na rys.11.8) i poszukiwanie lokalnych minimów.
4. Każdy punkt dla którego istnieje minimum wskaźnika IOAC jest porównywany z punktami sąsiednimi.

Detekcja krawędzi jest także możliwa przy zastosowaniu reguł rozmytych. Przykład konstrukcji reguł rozmytych do tego celu zilustrowano na rys. 11.10. W algorytmie tym zostały odpowiednio rozmyte jasności punktów obrazu przy zastosowaniu wybranej funkcji przynależności do zbioru rozmytego *ciemny*. Następnie obszar obrazu dzielono na fragmenty 3x3. Wykrywanie linii było

wynikiem oceny funkcji przynależności trzech punktów sąsiadujących do zbioru rozmytego *ciemny*.



Rys. 11.10. Przykładowa konstrukcja reguł rozmytych do detekcji krawędzi

ROZDZIAŁ 12

LOGIKA ROZMYTA W MEDYCYNIE

12.1. Grupowanie rozmyte w diagnostyce medycznej.....	137
12.2. Rozmyte przetwarzanie obrazów medycznych.....	137
12.3. Rozmyte systemy monitorowania i kontroli.....	139
12.4. Relacje rozmyte w diagnostyce.....	140
12.5. Logika rozmyta w medycznych systemach ekspertowych.....	143

12.1. Grupowanie rozmyte w diagnostyce medycznej

Podczas badań medycznych często uzyskuje się bardzo dużą liczbę danych, często nieprecyzyjnych i nieostrych. Z tego względu stosowane są aplikacje do inteligentnego ich grupowania. Jeden z podstawowych algorytmów grupowania rozmytego został opisany w podrozdziale 7.2.1.

Przykładowe zastosowanie grupowania rozmytego do klasyfikacji zaburzeń rytmu serca przedstawili Geva i Kareem [1]. Pomiar dotyczył interwałów czasowych pomiędzy charakterystycznymi punktami EKG w trwającym 30 minut zapisie tego sygnału. W wyniku pomiarów uzyskano ok. 6000 danych $R(n)$. Ponieważ arytmia objawia się wydłużeniem lub skróceniem interwału przeprowadzono grupowanie rozmyte w przestrzeni $R(n) R(n+1)$, dzięki czemu uzyskano obraz arytmii w postaci skupień odpowiadających normalnemu, przyspieszonemu i spowolnionemu rytmowi serca.

12.2. Rozmyte przetwarzanie obrazów medycznych

W przetwarzaniu obrazów medycznych techniki logiki rozmytej są stosowane do polepszania ich widoczności, segmentacji i rozpoznawania. Przykładowe wykorzystanie logiki rozmytej do segmentacji obrazów otrzymanych z rezonansu magnetycznego zostanie zaprezentowane na podstawie badań, które przeprowadzili Kobashi, Yata i Hall [1]. Na obrazach MRA (ang. magnetic resonance angiography) naczynia krwionośne są słabo widoczne, a ich granice nieostre. W celu wyselekcjonowania tych struktur z otoczenia, które składa się z tkanki kostnej, mięśniowej, tłuszczowej, płynu mózgowego, białej i szarej tkanki mózgu, zastosowano metodę granulacji rozmytej informacji (rozdz. 11). W procesie ekstrakcji cech wyróżniono trzy cechy charakteryzujące kwant naczynia krwionośnego a mianowicie *unaczynienie* (A_v), *wąskość* (A_n) i *konsystencję histogramu* (A_h). Pierwsze dwie cechy określające podobieństwo kwantu do naczynia krwionośnego zostały zdefiniowane wzorami:

$$A_v = \int_m \frac{4\pi S_m}{L_m^2 M} dm \quad A_n = \frac{V}{S^{3/2}} \quad (12.1)$$

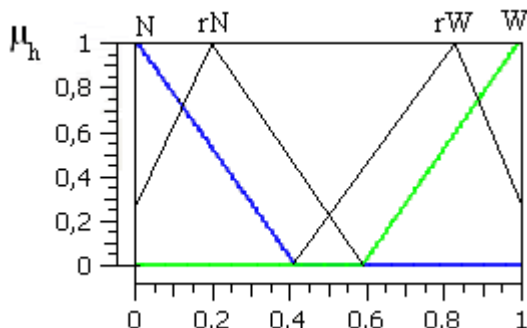
L_m , S_m – odpowiednio obwód oraz powierzchnia przekroju poprzecznego, M – długość kwantu wzdłuż głównej osi, V – liczba voxelów kwantu, S – średnie pole przekroju.

Trzecia cecha wynikająca z charakterystyki histogramu odróżniającej naczynia krwionośne od innych tkanek wyznaczana była ze wzorów:

$$A_h = \frac{\int x \cdot g_p(x) dx}{\int g_p(x) dx} \quad g_p(x) = \frac{f_p(x)}{f_w(x)} \quad (12.2)$$

Odpowiednie zmienne we wzorach 12.2 oznaczają: x – poziom jasności, $f_p(x)$, $f_w(x)$ – odpowiednio, liczby voxelów kwantu i całego obrazu o poziomie jasności x unormowane do 1.

Na podstawie wiedzy ekspertów lekarzy opracowano funkcje przynależności do następujących zbiorów rozmytych: *wysoki* (W), *raczej wysoki* (rW), *niski* (N) i *raczej niski* (rN) dla poszczególnych parametrów. Na rys. 12.1 przedstawiono przykładowe funkcje przynależności do tych zbiorów dla parametru A_h .



Rys. 12.1 Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: niski (N), raczej niski (rN), raczej wysoki (rW) i wysoki (W) poziom parametru A_h

Segregacja kwantów odbywała się według reguł umieszczonych w tabeli 12.1

Tabela 12.1. Selekcja kwantów do grup: naczynie krwionośne, tkanka tłuszczowa

model	Nazwa	A_v	A_n	A_h
A	naczynie	wysoka	wysoka	wysoka
B	naczynie	raczej wysoka	raczej wysoka	raczej wysoka
C	naczynie	raczej niska	wysoka	raczej wysoka
D	tłuszcz	raczej niska	wysoka	raczej niska
E	tłuszcz	raczej niska	raczej niska	raczej niska
F	tłuszcz	niska	niska	niska

Globalny stopień przynależności dla danego kwantu był wyznaczany w oparciu o formułę:

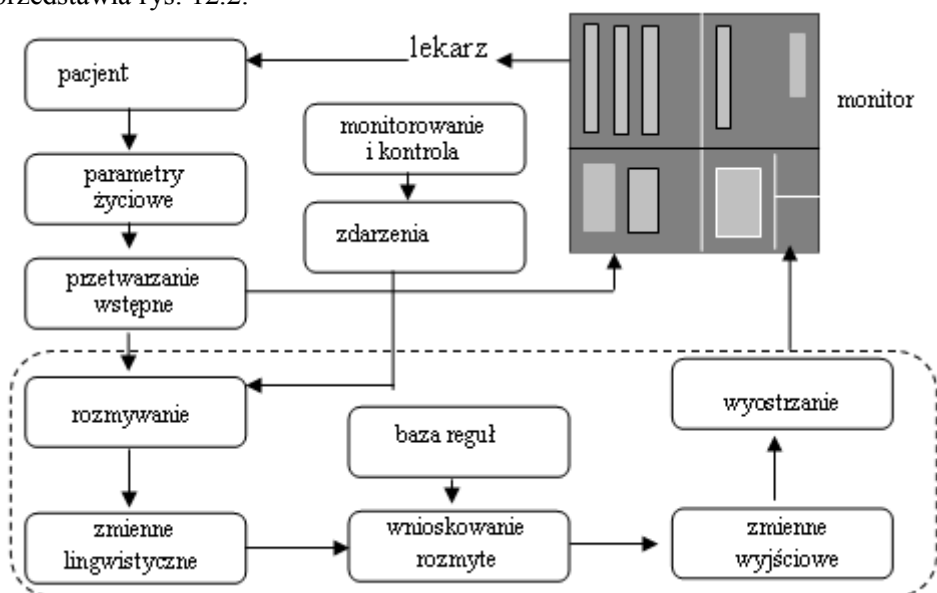
$$\mu = \min\left(\frac{\mu_v + \mu_n}{2}, \mu_h\right) \quad (12.3)$$

Kwant był zaliczany do tej grupy, dla której jego globalny stopień przynależności był największy. W następnym kroku algorytmu kwanty sąsiadujące były łączone. Proces łączenia przebiegał według następującej zasady. Dla połączonych kwantów obliczano parametry A_v , A_n i A_h oraz określano stopień przynależności posługując się formułami i wzorem 12.3. Globalny stopień przynależności połączonych kwantów porównywano ze stopniami dla pojedynczych kwantów. Jeśli stopień przynależności całości był większy od stopni przynależności pojedynczych elementów łączenie akceptowano. Proces był kontynuowany do momentu, gdy już żaden kwant nie był przyłączany. W ten sposób otrzymywano granule. Pozwoliło to zobrazować wąskie naczynia krwionośne i rozgałęzienia

bardzo słabo widoczne na obrazie oryginalnym, co jest niezmiernie ważne w diagnozowaniu tętniaków w mózgu.

12.3. Rozmyte systemy monitorowania i kontroli

Monitorowanie i kontrola rozmyta jest przedmiotem bardzo wielu systemów do obserwowania sygnałów fizjologicznych, automatycznego dawkowania leków, sterowania aparaturą oddechową, automatycznych alarmów. Są to systemy o dużym stopniu złożoności. Wiele aplikacji opracowano do kontroli anestezyjologicznej. Przykładem inteligentnego alarmu anestezyjologicznego jest system, który opracowali Jungk, Thull i Rau [1]. Architekturę tego systemu przedstawia rys. 12.2.

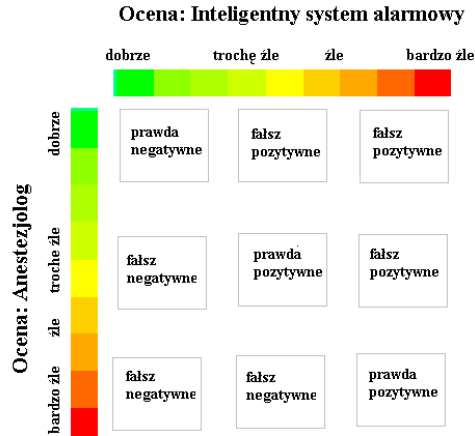


Rys. 12.2. Architektura inteligentnego alarmu. Podsystem rozmyty otoczony linią przerywaną

Parametry życiowe: wskazania elektrokardiografu, częstość serca, tętnicze ciśnienie skurczowe, itp. mierzone co 5 sek. oraz trendy spadku lub wzrostu (obliczane przy wykorzystaniu regresji liniowej i wielomianowej) po wstępnym przetwarzaniu i rozmyciu stanowiły zmienne wejściowe układu wnioskowania rozmytego. Odbywało się ono na podstawie 569 reguł opracowanych na podstawie danych uczących. Zastosowano trójstopniowy system regułowy.

W pierwszym stopniu poprzedniki reguł stanowiły: parametr życiowy i jego trend. W drugim odpowiednio łączono parametry wyjściowe z pierwszego stopnia, w trzecim drugiego stopnia. Stosowano kompensator Zimmermana z parametrem $\gamma=1/2$, jako operator agregujący. Na wyjściu stosowano sygnalizator barwny złożony z czterech sigletonów rozmytych: $\mu_{\text{dobrze}}(x)=1 \rightarrow$ zielony, $\mu_{\text{trochę złe}}(x)=1 \rightarrow$ żółty, $\mu_{\text{złe}}(x)=1 \rightarrow$ pomarańczowy, $\mu_{\text{bardzo złe}}(x)=1 \rightarrow$

czerwony. Działanie systemu zostało przetestowane przez lekarzy anestezjologów. Jest to bardzo ważna procedura przy konstruowaniu systemów dla medycyny. Ocena stanu pacjenta przez anestezjologa stanowiła punkt odniesienia dla inteligentnego systemu. Macierz ocen przedstawia rys. 12.3.



Rys. 12.3. Macierz ocen inteligentnego alarmu

Zastosowano następujące wskaźniki oceny alarmów:

Czułość (ang. sensitivity) = $(\sum \text{pozytywnych prawdziwych}) / (\sum \text{pozytywnych prawdziwych} + \sum \text{negatywnych fałszywych})$.

Specyficzność (ang. specificity) = $(\sum \text{negatywnych prawdziwych}) / (\sum \text{negatywnych prawdziwych} + \sum \text{pozytywnych fałszywych})$.

Przewidywalność (ang. predictability) = $(\sum \text{pozytywnych prawdziwych}) / (\sum \text{pozytywnych prawdziwych} + \sum \text{pozytywnych fałszywych})$.

Parametry te wynosiły odpowiednio: 95,7%, 95,3%, 87,4, co świadczy o dobrym funkcjonowaniu systemu.

12.4. Relacje rozmyte w diagnostyce medycznej

Diagnozowanie medyczne polega na określaniu związku pomiędzy symptomami i chorobami. Wiedza o symptomach uzyskiwana bezpośrednio z wywiadu z pacjentem oraz specjalistycznych badań charakteryzuje się różnym stopniem niepewności. Dla przykładu na podstawie wyników laboratoryjnych niemożliwe jest określenie ostrej linii granicznej pomiędzy stanem prawidłowym i patologicznym. Opis objawów choroby przez pacjenta jest subiektywny i niekompletny, mogą być one wyolbrzymiane lub niedoceniane. Uzasadnione jest więc wykorzystanie zbiorów i relacji rozmytych w systemach wspomagania diagnostyki. Pierwszy rozmyty model relacyjny między symptomami i chorobami zaproponował w 1979 roku Sanchez. W modelu tym zbiór rozmyty $A(s)$ reprezentował symptomy obserwowane u pacjenta, natomiast relacja rozmyta $R(s, d)$ medyczną wiedzę o związku symptomów s z chorobami d . Zbiór rozmyty

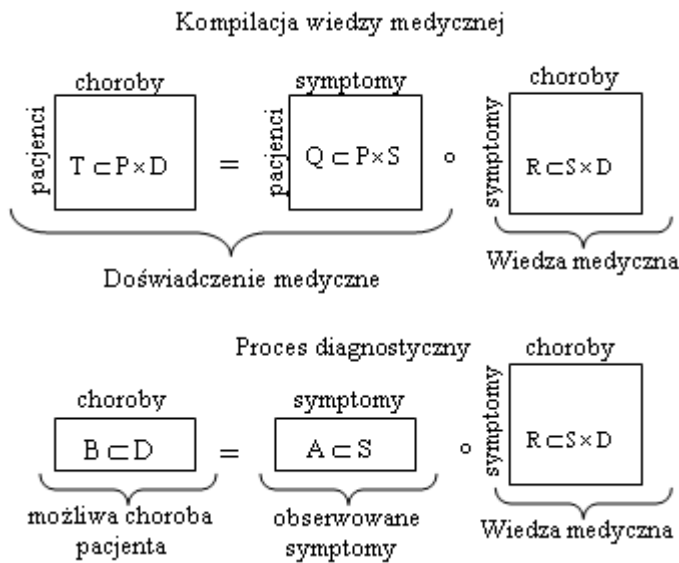
$B(d)$ odpowiadający przypuszczalnej diagnozie był wynikiem złożenia zbioru rozmytego $A(s)$ i relacji rozmytej $R(s,d)$ (wzory 12.4).

$$B = A \circ R$$

$$B(d) = \max_{s \in S} \{ \min[A(s), R(s, d)] \} \quad (12.4)$$

Stopnie przynależności obserwowanych symptomów do zbioru rozmytego $A(s)$ zależały od możliwości występowania symptomów lub ich intensywności. Stopnie przynależności w zbiorze rozmytym $B(d)$ określały poziom pewności diagnozy. Relacje rozmyte $R(s, d)$ mogą tworzyć większe relacje T będące złożeniem z relacją Q określoną na zbiorze pacjentów P i zbiorze chorób D (rys. 12.4):

$$T = Q \circ R \quad (12.5)$$



Rys. 12.4. Zbiory i relacje rozmyte w diagnostyce medycznej

Do rozwiązania rozmytego równania relacji 12.5 potrzebne jest doświadczenie medyczne pozwalające na określenie relacji pomiędzy symptomami i chorobami na podstawie wcześniejszych diagnoz. Możliwe jest, że w relacji R pojawi się więcej związków symptomu-choroby niż w rzeczywistości. Rezultaty zastosowania relacji R do danych symptomów należy, więc, traktować raczej jako hipotezy niż potwierdzenie diagnozy. W modelu, który zaproponował Adlassnig w projekcie CARDIAC-2 do wspomaganie diagnozy, założono istnienie dwóch typów relacji: występowania i potwierdzenia. Pierwszy typ jest źródłem wiedzy o tym, jak często symptomy s występują przy chorobie d , drugi określa moc z jaką symptomy potwierdzają diagnozę danej choroby.

Przykład 12.1.

Oznaczmy ostre zbiory symptomów, chorób i pacjentów odpowiednio przez S, D

i P . Zdefiniujemy relację $R_s(s, p)$ na iloczynie kartezjańskim $P \times S$. Funkcja przynależności $\mu_s(s, p)$ wskazuje na stopień obecności symptomu s u pacjenta p . Zdefiniujemy relację rozmytą $R_o(s, d)$ na iloczynie kartezjańskim $S \times D$. Stopień przynależności $\mu_o(s, d)$ jest wskaźnikiem częstości występowania symptomu s podczas choroby d . Niech $R_c(s, d)$ będzie rozmytą relacją określoną na tym samym zbiorze $S \times D$, zawierającą stopnie przynależności $\mu_c(s, d)$, będące wskaźnikami potwierdzenia przez symptom s diagnozy choroby d . Oczywiście stopnie przynależności do tych relacji wynikać powinny z dokumentacji medycznej, zawierającej np.: stwierdzenia typu: „symptom s rzadko wskazuje na chorobę d ” lub „symptom s zawsze wskazuje na chorobę d ”. itp. Przyporządkujemy odpowiednie stopnie przynależności do stwierdzeń lingwistycznych *zawsze, często, rzadko, nigdy* a mianowicie: 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0. Załóżmy, że dokumentacja medyczna dotyczy relacji między symptomami s_1, s_2, s_3 , a chorobami d_1, d_2 i składa się z następujących stwierdzeń:

Symptom s_1 występuje bardzo rzadko u pacjentów chorych na d_1 .

Symptom s_1 występuje często u pacjentów chorych na d_2 lecz rzadko potwierdza diagnozę choroby d_2 .

Symptom s_2 występuje zawsze u pacjentów chorych na d_1 i zawsze potwierdza chorobę d_1 ; s_2 nigdy nie występuje przy chorobie d_2 i jego obecność nigdy nie potwierdza choroby d_2 .

Symptom s_3 występuje bardzo często u pacjentów chorych na d_2 i często potwierdza chorobę d_2 .

Symptom s_3 występuje rzadko u pacjentów chorych na d_1 .

Ponieważ w niektórych stwierdzeniach występuje łącznik *bardzo* odpowiednie stopnie przynależności zostaną obliczone poprzez modyfikację:

$$\mu_{\text{bardzo}}(x) = [\mu(x)]^2 \quad (12.6)$$

Na podstawie załączonej dokumentacji możemy utworzyć następujące relacje rozmyte:

$$R_O = \begin{bmatrix} 0,06 & 0,75 \\ 1 & 0 \\ 0,25 & 0,56 \end{bmatrix} \quad R_C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Założmy, że znamy relację R_s występowania symptomów s_1, s_2, s_3 u pacjentów p_1, p_2, p_3 .

$$R_S = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,9 & 0 \\ 0,9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mając relacje R_s i R_O oraz R_C tworzymy cztery relacje: R_1 - oznaczającą występowanie symptomów, R_2 - potwierdzającą diagnozę, R_3 - oznaczającą niewystępowanie symptomów i R_4 - nie potwierdzającą diagnozę.

$$R_1(p, d) = R_S \circ R_O = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,56 \\ 0,9 & 0,6 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \quad R_2(p, d) = R_S \circ R_C = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,9 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix}$$

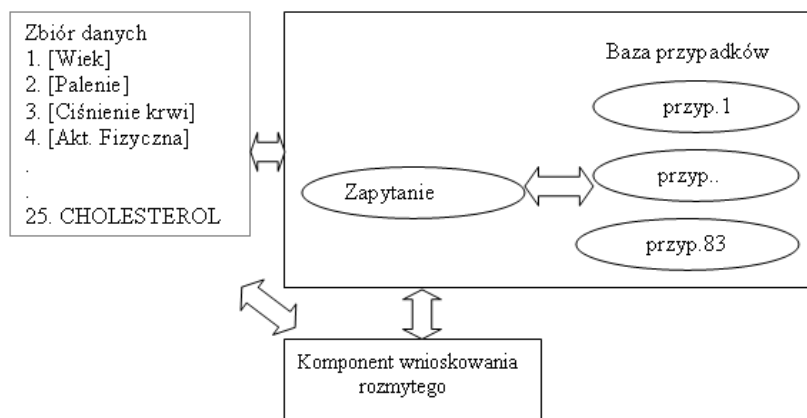
$$R_3(p, d) = R_S \circ (1 - R_O) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,8 \\ 0,6 & 0,9 \\ 0,9 & 0,44 \end{bmatrix} \quad R_4(p, d) = (1 - R_S) \circ R_O = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,6 \\ 0,25 & 0,56 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Z tych czterech relacji można wyciągnąć wiele wniosków diagnostycznych. Relacja R_2 wskazuje, że symptom d_1 potwierdza diagnozę u pacjenta p_2 . Relacje R_3 i R_4 wykluczają diagnozę u pacjenta p_3 na podstawie symptomu d_1 . Generalizując można uznać, że wystarczającym potwierdzeniem hipotezy dla pacjenta p na podstawie symptomu d jest aby $\max[R_1(p, d), R_2(p, d)] > 0,5$.

W późniejszych wersjach systemu CADIAG-2 zawarto nie tylko relacje symptomy-choroby, ale również relacje choroby- choroby, symptomy-symptomy oraz związki między kombinacjami choroby-symptomy. System został przetestowany w przypadkach chorób reumatycznych uzyskując 94,5% poprawnych diagnoz.

12.5. Logika rozmyta w medycznych systemach ekspertowych

Systemy ekspertowe są inteligentnymi programami komputerowymi, w których wykorzystywana jest wiedza i stosowane procedury wnioskowania w oparciu o doświadczenia człowieka - specjalisty w danej dziedzinie. Podstawowe elementy systemu ekspertowego to baza wiedzy, maszyna wnioskująca oraz interfejs użytkownika, za pośrednictwem którego może on uzyskać odpowiedź na zadane systemowi pytanie. Baza wiedzy składa się ze zbioru faktów oraz reguł, które są wykorzystywane w module wnioskowania. Dobry system ekspertowy powinien zawierać możliwie pełną wiedzę w danej dziedzinie, zapewniać możliwość jej aktualizacji, umiejętnie naśladować sposób rozumowania człowieka – eksperta oraz charakteryzować się przyjaznym dla użytkownika interfejsem. Dla celów medycznych opracowano wiele systemów ekspertowych. Przykładami są: MYCIN - opracowany w USA w 1974 r. - służący jako „doradca” dla lekarzy przy diagnozowaniu chorób zakaźnych, CASNET-zbudowany przez Kulikowskiego i Weissa do diagnozowania stanów chorobowych związanych z jaskrą, PIP - wspomagający diagnozę chorób związanych zaburzeniami nerek, INTERNIST/CADUCEUS do diagnozowanie 500 jednostek chorobowych, AVES-N - opracowany przez IBIB PAN oraz Instytut Matki i Dziecka przeznaczony do wspomagania leczenia noworodków z zespołem niewydolności oddechowej. Ze względu na fakt, że dane medyczne pochodzące z wywiadu z pacjentem i badań laboratoryjnych charakteryzuje często niepewność i nieostrość granic, do systemów ekspertowych włączane są elementy logiki rozmytej. Jednym z takich systemów jest DSCHDRA do oceny zagrożenia chorobą zakrzepową krwi, który opracowali Schuster, Adamson i Bell. Ogólny schemat tego systemu przedstawia rys. 12.5.



Rys. 12.5. Schemat ogólny systemu ekspertowego do oceny zagrożenia chorobą zakrzepową krwi

W systemie tym można wyróżnić dwie podstawowe części: bazę przypadków oraz komponent wnioskowania rozmytego. Zapytanie jest kierowane do bazy, w której poszukiwany jest najbliższy podanym wartościom przypadek medyczny oraz rozmytego systemu wnioskowania, który składa się standardowo z: bloku rozmywania, bazy reguł rozmytych bloku wnioskowania oraz wyostrzania. System wnioskowania rozmytego służy głównie do oceny cholesterolu, którego zwiększony poziom jest główną przyczyną choroby zakrzepowej krwi. Do pełnej oceny ryzyka istotne znaczenie mają pomiary poziomu: ogólnego T (ang. total), LDL (ang. low-density lipoproteins) zwanego często „złym cholesterolom”, HDL (ang. high-density lipoproteins) zwanego „dobrym cholesterolom” oraz stosunków T/HDL, LDL/HDL. Jeśli wartości tych wskaźników nie przekraczają określonych granic, określa się poziom cholesterolu jako *normalny*. Granice te są oczywiście nieostre. Dla każdego ze wskaźników opracowano w oparciu o opinie lekarzy specjalistów funkcje przynależności do zbiorów rozmytych: *normalny*, *graniczny*, *nienormalny* i *ryzykowny*. Podobnie nazwane zbiory rozmyte charakteryzowały rozmycie wskaźnika na wyjściu, którego zakres ustalono na $[0,1]$ o nazwie ogólnej *cholesterol*. Tak więc na wyjściu otrzymywano zbiór rozmyty. W wyniku wyostrzania uzyskiwano wskaźnik informujący o tym, czy pomiary wskazują na stan normalny, graniczny względnie stan zagrożenia. Informacja ta w połączeniu z analizą przypadków zbliżonych dawała pełny obraz stanu zagrożenia u badanej osoby.

BIBLIOGRAFIA

1. Barro S., Martin R, Fuzzy Logic in Medicine, Physica-Verlag, Heidelberg New York, 2002.
2. Barni M., Gualtieri R., A new possibilistic clustering algorithm for line detection in real world imagery, Pattern Recognition, 32, 1999, 1897-1909.
3. Bigand A., Bouwmans T., Dubus J. P., Extraction of line segments from fuzzy images, Pattern Recognition Letters, 22, 2001, 1405-1418.
4. Bigand A, Colot O., Fuzzy filter based on interval-valued fuzzy sets for image filtering, Fuzzy Sets and Systems 161, 2010, 96-117.
5. Cader A., Rutkowski L., Tadeusiewicz R., Zurada J., Artificial Intelligence and Soft Computing, Academic Publishing House EXIT, Warsaw 2006.
6. Cheng H. D., Yen-Hung Chen, Fuzzy partition of two-dimensional histogram and its application to thresholding, Pattern Recognition, 32, 1999, 825-843.
7. Greenfield S., Chiclana F., Coupland S., John R., The collapsing method of defuzzification for discretised interval type-2 fuzzy sets, Information Sciences, 179, 2009, 2055-209.
8. Haas O.C. L., Burnham K. J., Intelligent and Adaptive Systems in Medicine, Taylor & Francis, 2008.
9. Karnik N. N., Mendel J. M., Centroid of a typ-2 fuzzy set, Information Science, 132, 2001, 195-220.
10. Klir G. J. Yuan B., Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications, Prentice Hall PTR, NJ, 1995.
11. Krell G., Tishoosh H. R., Lielienblum T., Moore C. J., Michaelis B., Enhancement and associative restoration of electronic portal images in radiotherapy, Journal of Medical Informatics, 49, 1998, 157-171.
12. Liu F, An efficient type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system, Information Science, 178, 2008, 2224-2236.
13. Łachwa A., Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2001.

14. Łęski J., Systemy neuronowo-rozmyte, WNT, Warszawa 2008.
15. Martinez R., Castillo O., Aguilar L. T. , Optimization of interval type-2 fuzzy logic controllers for a perturbed autonomous wheeled mobile robot using genetic algorithms, *Information Science* 179, 2009, 2158-2174.
16. Mendel J. M., On answering the question “ Where do I start in order to solve a new problem involving interval type-2 fuzzy sets?, *Information Science* 179, 2009, 3418-3431.
17. Myszkorowski K., Zadrozny S., Szczepaniak P.S., Klasyczne i rozmyte bazy danych, Akademska Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2008.
18. Rutkowski L., Metody i techniki sztucznej inteligencji, PWN, Warszawa 2005.
19. Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L., Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte, PWN, Warszawa 1999.
20. Sinčák P., Vaščák J., Sirota K., Machine Intelligence Quo Vadis?, Word Scientific, 2004.
21. Suszyński W., Kuniszyk-Józkowiak W., Smółka E., Wiśniewski M., Codello I., Automatic recognition of Non-Fluent Stops, *Polish J. of Environ. Stud.*, Vol.17, No. 3B, 2008, 428-432.
22. Tizhoosh H. R., Image thresholding using type II Fuzzy sets, *Pattern Recognition*, 38, 2005, 2363-2372.
23. Tizhoosh H. R., Krell G., Michaelis G. B., On fuzzy enhancement of megavoltage images in radiation therapy, *IEEE Conference on Fuzzy Systems*, 1997, 1399-1404.
24. Yager R. R., Filev D. P., Podstawy modelowania i sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1995.

SŁOWNIK

absorption	absorpcja
ambiguity	nieokreśloność
associativity	łączność
belief measure	miara przekonania
Cartesian product	iloczyn kartezjański
center of gravity method	metoda środka ciężkości
characteristic function	funkcja charakterystyczna
commutativity	przemienność
compatibility relation	relacja zgodności
compensatory operations	operacje skompensowane
complement	dopełnienie
composition based inference	wnioskowanie oparte na złożeniu
core	rdzeń
crisp sets	zbiory ostre
defuzzification	wyostrzanie
distributivity	rozdzielność
equivalence relation	relacja równoważności
evidence theory	teoria dowodów
extension principle	zasada rozszerzania
First Aggregate Then Infer	agregacja a następnie wnioskowanie
First Infer Then Aggregate –FITA	wnioskowanie a następnie agregacja
fuzzy classifiers	klasyfikatory rozmyte
fuzzy clustering	grupowanie rozmyte
fuzzy c-means algorithm	algorytm rozmytych c-średnich
fuzzy divergence	rozmyta dywergencja
fuzzy entropy	rozmyta entropia
fuzzy geometrical approach	metoda rozmytej geometrii
fuzzy interval	przedział rozmyty
fuzzy logic controller	sterownik rozmyty
fuzzy measure	miary rozmyte

fuzzy sets	zbiory rozmyte
fuzzy thresholding	progowanie rozmyte
fuzzyfication	rozmywanie
grid partition	podział siatkowy
idempotence	idempotentność
identify	identyczność
implication	implikacja
inclusion	inkluzja
index of fuzziness	indeks rozmycia
individual rule inference	wnioskowanie oparte na pojedynczych regułach
information-theoretical approach	zastosowanie teorii informacji
intersection	przecięcie, iloczyn
involution	inwolucja
law of contradiction	prawo zaprzeczenia
law of excluded middle	prawo wyłączonego środka
left spreads	rozzrzt lewostronny
L-R (left -right) number	liczba rozmyta L-R (lewa-prawa)
membership function	funkcja przynależności
Multi-Input-Multi-Output system	system o wielu wejściach i wielu wyjściach
Multi-Input-Single-Output system	system o wielu wejściach i jednym wyjściu
necessity measure	miara konieczności
nested sets	zbiory zagnieżdżone
ordering fuzzy relation	rozmyta relacja porządku
pattern recognition	rozpoznawanie wzorców
plausibility measure	miarę domniemania
possibility distribution function	funkcja rozkładu możliwości
possibility measure	miara możliwości
possibility theory	teoria możliwości
probability measure	miara probabilistyczna (prawdopodobna)
projection	projekcja
reflexivity	zwrotność
right spreads	rozzrzt prawostronny
rule-based approach	metoda reguł rozmytych
scatter partition	podział rozproszony
standard fuzzy operations	operacje standardowe na zbiorach

strict negation	rozmytych
strong negation	ściśła negacja
symmetry	silna negacja
tolerance relation	symetria
transitivity	relacja tolerancji
union	przechodniość
vagueness	suma
α -cuts	niewyraźność
	α -przekroje

SKOROWIDZ

absorpcja	3
agregacja zbiorów rozmytych	66
algebra Boole'a	2
algebra de Morgana	19
algorytm Gustafsona-Kessela	88
algorytm rozmytego progowania	132, 133
algorytm rozmytego zwiększania kontrastu	129, 130
algorytm rozmytej segmentacji	131, 132
algorytm rozmyty c-średnich	85-87
algorytm rozpoznawania niepłynności	93-95
algorytm tworzenia bazy reguł	71-74
algorytm Wang'a - Mendela	71
algorytm wyznaczania centroidu	120, 121
algorytm z podziałem rozproszonym	73, 74
alternatywa	54
baza reguł rozmytych	63, 64
blok rozmywania	74
blok wnioskowania	74-76
blok wyostrzania	76-78
czas fonacji	92
czułość	140
dodawanie liczb LP	51
dodawanie liczb rozmytych	45
dopełnienie relacji rozmytej	38
dopełnienie standardowe	19
dopełnienie Sugeno	30, 31
dopełnienie Yagera	31, 32
dopełnienie zbiorów rozmytych typu 2	118

dopełnienie zbioru ostrego	2
dzielenie liczb LP	52
dzielenie liczb rozmytych	45
entropia podziału	89
entropia Shannona	104
funkcja przynależności s	10
funkcja przynależności z	10
funkcja przynależności π	10
funkcja charakterystyczna	2
funkcja drugorzędnej przynależności	115
funkcja głównej przynależności	115
funkcja podstawowej przynależności	115
funkcja przynależności	5, 7
funkcja przynależności π	10
funkcja przynależności gaussowska	11
funkcja przynależności L	7
funkcja przynależności sigmoidalna	12
funkcja przynależności Γ	7
funkcja przynależności Λ	8
funkcja przynależności Π	9
funkcja rozkładu możliwości	100
grupowanie rozmyte	84
idempotentność	3
identyczność	3, 4
iloczyn kartezjański	4, 34
iloczyn liczb LP	51
iloczyn liczb rozmytych	47
iloczyn zbiorów rozmytych typu 2	118
implikacja Gödela	61, 62
implikacja Goguena	61
implikacja Kleene'a-Dienesa	60
implikacja Larsena	58, 59
implikacja Łukaszewicza	61
implikacja Mamdaniego	58, 59
implikacja Reschera	63

implikacja rozmyta	56, 58
implikacja Zadeha	62, 63
indeks rozmycia	132
inkluzja zbiorów	4
inteligentne alarmy	139
intensyfikacja kontrastu	13
inwolucja	3
język zapytań SQLf	112, 113
klasyfikacja zaburzeń rytmu serca	137
klasyfikatory rozmyte	89
koncentracja	13
koniunkcja	54
konkluzja	54
łączność	3
liczba odwrotna	46
liczba przeciwna	46
liczba przeciwna LP	51
liczba rozmyta	44
liczba trójkątna	48
liczby LP	50
logika klasyczna	54
metoda maksimum	77
metoda środka ciężkości	77
miara możliwości	99
miara konieczności	99
miary domniemania	97
miary przekonania	97
miary rozmyte	97
MIMO	64
MISO	64
mnożenie liczb LP	52
mnożenie liczb rozmytych	45
modus ponens	55, 56
modus tollens	55, 56
modyfikacja funkcji przynależności	13

normy trójkątne	20
nośnik zbioru rozmytego	6
odejmowanie liczb rozmytych	45
odległość euklidesowa	105
odległość Hamminga	104
operacje skompensowane	29
operacje standardowe	19
operator agregacji	66, 67
operator średniej ważonej	67
operator uogólniony średniej	66
operator Zimmermana	66
porównywanie liczb rozmytych	49
prawa de Morgana	4
prawo wyłączonego środka	4
prawo zaprzeczenia	4
progowanie rozmyte	131
projekcja	41
przecięcie zbiorów	2
przedział rozmyty	45
przemienność	3
przesłanka	54
przewidywalność	140
punkty krzyżowania	7
Q- implikacja	60
rdzeń zbioru rozmytego	6
redukcja typu	120
relacja rozmyta	36
relacje binarne	39
relacje rozmyte typu 2	119
R-implikacja	60
rozcieńczenie	13
rozmyta detekcja krawędzi	135
rozmyta diagnostyka medyczna	140, 141
rozmyta granulacja	133
rozmyta segmentacja obrazów medycznych	137

rozmyte modele związków encji	109-110
rozmyte obiektowe bazy danych	113
rozmyte relacyjne bazy danych	107-109
rozmyte systemy monitorowania	139
rozmywanie obrazu	127, 128
rozmywanie singleton-singleton	122
rozmywanie typu non- singleton	74
rozmywanie typu singleton	74
rozpoznawanie wzorców	84
rozszerzenie cylindryczne	42
różnica algebraiczna	33
różnica drastyczna	33
różnica ograniczona	33
różnica standardowa	32
różnica symetryczna	34
segmentacja rozmyta	131
S-implikacja	60
singleton rozmyty	12, 74
skalowanie liczb rozmytych	49
skalowanie liczb rozmytych	51
s-norma	21
s-norma drastyczna	22, 25
s-norma Einsteina	24, 26
s-norma Fodora	23, 26
s-norma Hamachera	27, 28
s-norma Łukaszevicza	22, 25
s-norma probabilistyczna	21, 25
s-norma Sugeno	28, 29
s-norma Yagera	26, 27
s-norma Zadeha	21, 24
specyficzność	140
sterownik Mamdaniego-Assilana	78-80
sterownik rozmyty	70
sterownik Takagi-Sugeno-Kanga	80-82
sterownik z implikacją Larsena	76

stopień przynależności	5
stopień rozmycia	89
stwierdzenia z kwalifikatorami	103
stwierdzenia z kwantyfikatorami	103
stwierdzenia z łącznikami	103
stwierdzenia z modyfikatorami	102
suma zbiorów rozmytych typu 2	117
system FQUERY	112
system Łęskiego-Czogały	82
system rozmyty typu 2	121-125
systemy ekspertowe	143, 144
szerokość zbioru rozmytego	7
śląd niepewności	116
teoria Dempstera-Schafera	97
teoria dowodów	97
teoria możliwości	99
teoria prawdopodobieństwa	101, 102
t-norma	21
t-norma algebraiczna	21, 25
t-norma drastyczna	22, 25
t-norma Einsteina	24, 26
t-norma Fodora	23, 26
t-norma Hamachera	27,28
t-norma Łukaszevicza	21, 25
t-norma Sugeno	28
t-norma Yagera	26, 27
t-norma Zadeha	21, 24
uniwersum	2
wnioskowanie rozmyte	55
wskaźnik Fukuyamy-Sugeno	89
wskaźnik obszaru zbioru rozmytego	134
wskaźnik Xie-Bieni	89
wyostrzanie obrazu	129
wysokość zbioru rozmytego	6
zapytania nieprecyzyjne	110, 113

zasada dekompozycji	15
zasada dekompozycji	14, 15
zasada rozszerzania	16
zasada rozszerzania	16
zbiory ostre	2-4
zbiory rozmyte	4
zbiory rozmyte osadzone	116
zbiory rozmyte przedziałowe	122, 123
zbiory rozmyte typu 2	115
zbiory zagnieżdżone	99
zbiór pusty	3, 116
zbiór rozmyty wypukły	44
złożenie relacji	39
zmienne lingwistyczne	57
zmniejszenie kontrastu	13
α -przekroje	14, 15

